

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LA GARANTIE DE REVENUS TEMPORAIRES

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

ERIKA IVONNE MALDONADO

MAI 2014

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

J'adresse mes remerciements à toutes les personnes qui m'ont aidée dans la réalisation de ce mémoire.

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de recherche, Mathieu Boudreault, pour m'avoir guidée dans mon travail, pour m'avoir aidée à trouver des solutions pour avancer, pour m'avoir encouragée et pour tout le temps qu'il m'a consacré.

Je remercie également Maciej pour ses conseils et ses idées.

Enfin, je tiens à exprimer ma plus sincère reconnaissance envers mon époux pour faire partie de ma vie et vivre cette expérience avec moi, comme si c'était la sienne.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES FIGURES	vii
LISTE DES TABLEAUX	ix
RÉSUMÉ	xi
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
PRÉLIMINAIRES	3
1.1 Contexte	3
1.1.1 Description des garanties	3
1.2 Revue de la littérature	7
1.2.1 Retraits prédéterminés (statiques)	7
1.2.2 Retraits dynamiques	9
CHAPITRE II	
RETRAITS MINIMUMS GARANTIS (GMWB)	13
2.1 Contexte	13
2.2 La garantie de revenus temporaire (GMWB)	15
2.3 Modélisation	15
2.3.1 Notation	16
2.4 Premiers pas vers la tarification	17
2.4.1 Option d'achat	17
2.4.2 Option de vente	18
2.5 Modélisation de Milevsky et Salisbury	19
2.5.1 Calcul de l'option quanto asiatique de vente avec moyenne arithmétique.	20
2.6 Modélisation de Yan Liu	23
2.7 La valeur du pourcentage de la prime α	25
2.8 L'approximation lognormale	26
CHAPITRE III	
ÉVALUATION DU GMWB PAR SIMULATION	29

3.1	Deux approximations à la valeur d'une option asiatique arithmétique	30
3.1.1	Approximation par les sommes de Riemann (schéma 1)	30
3.1.2	Approximation par la méthode du trapèze (schéma 1)	31
3.2	Méthode de variable de contrôle	33
3.3	Deux approximations de la valeur d'une option asiatique géométrique . . .	34
3.4	Prix exact d'une option géométrique asiatique	35
3.5	Simulation de l'option asiatique avec moyenne arithmétique	36
CHAPITRE IV		
	ÉVALUATION DU GMWB PAR DIFFÉRENCES FINIES	39
4.1	Approximation des dérivées partielles	40
4.1.1	Dérivées du premier ordre	42
4.1.2	Dérivée d'ordre 2	44
4.2	Construction de la grille	44
4.3	Méthode explicite	45
4.4	Méthode implicite	47
4.5	θ -méthode	48
4.6	Conditions de frontière	52
CHAPITRE V		
	AMÉLIORATIONS DU MODÈLE	57
5.1	Taux d'intérêt stochastique	59
5.2	Volatilité stochastique	64
5.2.1	Mesure neutre au risque	65
5.3	GMWB dynamique	68
	CONCLUSION	75
ANNEXE A		
	OPTIONS ASIATIQUES	77
ANNEXE B		
	PREUVE DU LEMME 6	79
	BIBLIOGRAPHIE	80

TABLE DES FIGURES

Figure	Page
1.1 Différents types de garanties	5
1.2 Garantie avec <i>ratchet</i>	6
1.3 Garantie avec <i>ratchet</i> et <i>rollup</i>	7
2.1 Scénario favorable pour l'assureur ($n=7$)	14
2.2 Scénario défavorable pour l'assureur ($n=7$)	14
2.3 Comparaison des valeurs de α obtenues sous lognormalité avec les valeurs obtenues par Liu et Milevsky.	27
3.1 Comparaison du pourcentage de la prime α	38
4.1 Différences finies en avant	43
4.2 Différences finies en arrière	43
4.3 Différences centrales	44
4.4 Grille	45
4.5 Schéma explicite aux différences finies	47
4.6 Schéma implicite aux différences finies	48
4.7 θ -méthode	49
4.8 Valeurs aux bornes	54
4.9 Valeurs de la prime α	54
5.1 α par rapport au taux d'intérêt sans risque et à la volatilité.	58
5.2 Valeur de la prime α avec/sans taux d'intérêt stochastique. Paramètres : $r_0=0,05$; $\rho = -0,2$; $\sigma_r = 0,01$; $k = 0,0349$; $\theta = 0,05$ et $\sigma_S = 0,2$	64
5.3 Valeur du pourcentage de la prime α avec taux de volatilité stochas- tique. Paramètres Kling : $r=0,05$; $\rho = -0,569$; $\sigma_v = 0,55$; $k = 4,75$; $\theta =$ $0,22^2$; $V_0 = 0,22^2$ et $\sigma_S = 0,2$	67

5.4	Valeur maximale de $g(\gamma)$	71
5.5	Comparaison du prix de la garantie lorsque le retrait est statique et dynamique.	73
A.1	<i>Payoff</i> d'une option d'achat asiatique	78
A.2	<i>Payoff</i> d'une option de vente asiatique	78

LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
2.3 Comparaison des valeurs de α obtenues sous lognormalité versus les valeurs obtenues par Liu, Milevsky et Salisbury.	28
3.1 Valeurs de α obtenues sans variable de contrôle. Les paramètres sont : $T = 10, r = 0,05, \sigma = 0,2$ B.I.=borne inférieure de l'intervalle de confiance de 95% B.S.=borne supérieur de l'intervalle de confiance de 95%	32
3.2 Valeurs de α obtenues sans variable de contrôle. Avec $T = 20, r = 0,05, \sigma = 0,2$	33
3.3 Valeurs estimées de la variable de contrôle. Les paramètres sont : $T = 10, r = 0,05, \sigma = 0,2$ et $\alpha = 0,00972781$	35
3.4 Valeurs de α par le schéma 2 avec variable de contrôle. Avec $r = 0,05, \sigma = 0,2$	37
3.5 Comparaison des valeurs α obtenues avec les valeurs obtenues par Liu et Milevsky. Avec $r = 0,05, \sigma = 0,2$	37
4.3 Comparaison des valeurs du pourcentage de la prime α	55
5.1 Comparaison de la valeur des frais α . Paramètres : $T=10$	58
5.2 Comparaison de la valeur de la prime α . Paramètres : $r_0=0,05; \rho=-0,2; \sigma_r=0,01; k=0,0349; \theta=0,05$ et $\sigma_S=0,2$. le symbole % représent la différence relative entre MC et Vasicek	63
5.4 Comparaison des valeurs de α obtenues sous le modèle de Heston et une volatilité constante.	67
5.5 Comparaison de la valeur de frais, α en P.B. paramètres : $r=0,05 \sigma_S=0,2$	72
5.6 Comparaison de la valeur de la prime α en P.B. paramètres : $r=0,05$ et $\sigma_S=0,3$	73

RÉSUMÉ

Dans le passé, les compagnies d'assurances proposaient à leurs clients des rentes certaines ou viagères, où le risque était la mortalité et la garantie d'un taux fixe. Récemment, les rentes variables ont connu un grand succès, car l'épargne peut être investie dans des fonds qui généralement offrent un taux de rendement plus élevé que ceux d'une rente certaine, mais à la différence des fonds communs de placement, le produit vient accompagné de garanties en cas de décès ainsi qu'à l'échéance. Il s'agit donc d'un produit hybride qui joint placement et assurance.

Ce mémoire porte sur les contrats d'assurance à revenus minimums garantis (*guaranteed minimum withdrawal benefit*, GMWB). Nous travaillerons sur la façon de les évaluer sous différents modèles. Tout d'abord, nous aborderons les différentes façons de voir le contrat. Ensuite, nous trouverons la prime continue devant être payée par l'assuré dans le modèle de Black-Scholes, à l'aide de la méthode aux différences finies et de la méthode de Monte Carlo, sous deux schémas différents, qui incluent méthodes de variables de contrôle. Finalement, nous évaluerons la garantie avec taux d'intérêt stochastique sous le modèle de Vasicek, ainsi que la volatilité stochastique avec le modèle de Heston et nous concluerons en donnant une brève introduction dans le cas où les retraits sont faits de façon dynamique.

INTRODUCTION

La majorité des articles traitant des garanties de placement dans les assurances-vie font référence aux garanties plus traditionnelles, telles que les garanties s'appliquant sur le capital au décès ou à l'échéance. Toutefois, il n'y a pas beaucoup de références portant sur la garantie de revenus minimums. Dans ce mémoire, nous nous concentrerons sur la garantie de revenus temporaires (GMWB) qui a été introduite aux États-Unis par le groupe de services financiers Hartford en 2002 et, par la suite, au Canada en 2007. Notre objectif est d'expliquer ce produit, de l'évaluer principalement avec deux méthodes différentes et de le présenter dans un contexte plus complexe, c'est-à-dire où le taux d'intérêt et la volatilité sont stochastiques. Nous allons également introduire brièvement la notion de retraits optimaux.

Ce mémoire est composé de cinq parties :

Tout d'abord, la section suivante fournit une revue de la littérature dans le cadre de la garantie de revenus temporaire (GMWB). Dans le chapitre 2, j'introduis de façon formelle la garantie GMWB et j'explore deux différentes approches d'évaluation pour celle-ci lorsque le taux d'intérêt, la volatilité et les retraits sont constants. La première approche est proposée dans l'article de Milevsky et Salisbury (2006). Mon apport ici a été de faire le développement détaillé de tous les calculs et de faire les transformations nécessaires aux résultats présentés par Milevsky et Salisbury (2006) pour réussir à utiliser les résultats présentés dans l'article de Vecer. Cet article est d'une grande utilité, car il permet de réduire la dimension du problème.

La deuxième approche est proposée par Liu (2010). Même si des calculs plus détaillés sont présentés dans son travail de doctorat, j'ai fait quelques calculs additionnels pour présenter le résultat d'une façon plus intuitive. À la fin de ce chapitre, je présente les

résultats que j'ai obtenus en utilisant l'approximation lognormale et je les compare avec les résultats présentés par Milevsky et Salisbury (2006) et Liu (2010). J'ai choisi cette première méthode pour commencer, parce que c'est la méthode la plus simple et nous étudierons avec plus de détails les autres méthodes dans les chapitres suivants.

Dans le chapitre 3, je présente la méthode de Monte Carlo pour donner une approximation à la valeur de l'espérance associée à la garantie GMWB. L'idée principale de ce chapitre est de donner une approximation à l'intégrale associée à l'espérance avec différentes approximations. Dans ce cas, j'ai suivi l'article de Lapeyre et Temam (2000). À la fin du chapitre je montre les résultats obtenus pour la garantie avec plusieurs nombres de simulations et pour les différentes méthodes.

Dans le chapitre 4, j'introduis d'une façon très simple la méthode aux différences finies, car même si elle est une technique simple, son utilisation est beaucoup plus complexe avec les GMWB. Je développe chacune des étapes pour résoudre l'équation différentielle. Je fais le calcul pour trouver les frontières et finalement je compare mes résultats avec ceux de Liu (2010) et Milevsky et Salisbury (2006).

Dans le chapitre 5, j'introduis la garantie avec taux d'intérêt stochastique. J'ai suivi l'article de Peng et al. (2009) et j'ai fait quelques modifications pour l'adapter au problème de la garantie GMWB. À ma connaissance, il y a peu d'analyses sur l'impact du taux d'intérêt stochastique pour l'évaluation d'un GMWB. Par la suite, j'ai évalué la garantie en supposant une volatilité stochastique et j'ai aussi fait la comparaison des primes par rapport à un modèle où la volatilité est constante. Pour terminer le chapitre, j'ai fait une introduction simple à la garantie GMWB lorsqu'on fait des retraits optimaux ce qui a un impact très grand par rapport aux retraits constants Dai et al. (2008).

CHAPITRE I

PRÉLIMINAIRES

1.1 Contexte

Les assureurs ont conçu les rentes variables pour s'adapter aux besoins de l'assuré qui veut profiter des hausses du marché. Cependant il fallait limiter les répercussions négatives en cas de fluctuations défavorables du marché, en plus d'offrir certaines garanties sur le montant investi en cas de décès ou d'objectifs déjà fixés, tels que l'achat d'une rente à l'âge de la retraite.

1.1.1 Description des garanties

Dans le marché, on peut distinguer sept groupes de garanties. Parmi celles-ci on retrouve :

- Garantie d'un capital minimum en cas de décès (GMDB, *Guaranteed Minimum Death Benefit*) : Cette garantie a été introduite en 1980. Elle procure un montant spécifique en cas de décès aux bénéficiaires qui sera le montant maximal entre le capital initial et l'épargne du client au moment du décès. Dans certaines variations de cette garantie, on peut inclure une garantie *ratchet* et une garantie *rollup* (taux de revalorisation minimal garanti) pour augmenter la valeur de la garantie. Ces garanties seront définies dans la section suivante.
- Garantie de revenus minimums à partir d'une date fixée (GMIB, *Guaranteed Minimum Income Benefit*) : Cette garantie introduite en 1996, offre l'option de choisir entre l'épargne obtenue au moment de la maturité du contrat ou une rente temporaire ou

viagère différée dont le taux et la table de mortalité de la rente sont prédéfinis dans le contrat. Cette garantie ressemble à la garantie GAO (*Guaranteed Annuity Option*), mais généralement dans la garantie GMIB, le *payoff* offre plus de possibilités.

- Garantie d'un capital minimum en cas de vie (GMAB, *Guaranteed Minimum Accumulation Benefit*) : Cette garantie permet à l'assuré d'obtenir en cas de survivance à la maturité du contrat, la valeur maximale entre son épargne et la valeur garantie, en échange d'une prolongation de son contrat.
- Garantie d'un montant minimum à partir d'une date fixée (GMMB, *Guaranteed Minimum Maturity Benefit*) : Cette garantie permet à l'assuré de recevoir au terme d'une période d'attente définie, la valeur maximale entre un pourcentage de son épargne et une valeur garantie prédéfinie dans le contrat, sans prolongement du contrat comme dans le cas précédent. En contrepartie, dans le cas où la valeur de son épargne est supérieure à la valeur garantie, l'investisseur recevra une participation inférieure à 100 %, ce qui diminue la valeur espérée de son gain.
- Garantie d'un rachat minimum à partir d'une date fixée (GMSB, *Guaranteed Minimum Surrender Benefit*) : Cette garantie offre au client, au-delà d'une période de carence, un montant minimal sur la valeur de rachat.
- La garantie de revenus minimums (GMWB, *Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit*) : Cette garantie instaurée en 2002 offre une protection au client contre le risque de possibles fluctuations défavorables du marché en lui garantissant pour une période établie, des retraits dont la valeur actuelle est le montant initial (le taux est convenu dans le contrat). Elle peut avoir une période d'accumulation.

Généralement, ces retraits sont faits chaque année ou à tous les six mois et ils peuvent être fixes ou variables. Cette garantie sera décrite de façon plus détaillée dans les chapitres suivants.

Les fonds distincts avec cette garantie ont été très bien accueillis aux États-Unis, parce qu'en plus de contribuer à la réduction des impôts de l'assuré, ils offrent une protection contre les changements défavorables du marché. En 2007, les rentes variables avec GMWB représentaient 71,5 % du marché de rentes aux États-Unis.

- La garantie de revenus viagers (GLWB, *Guaranteed Lifetime Withdrawal Benefit*) :

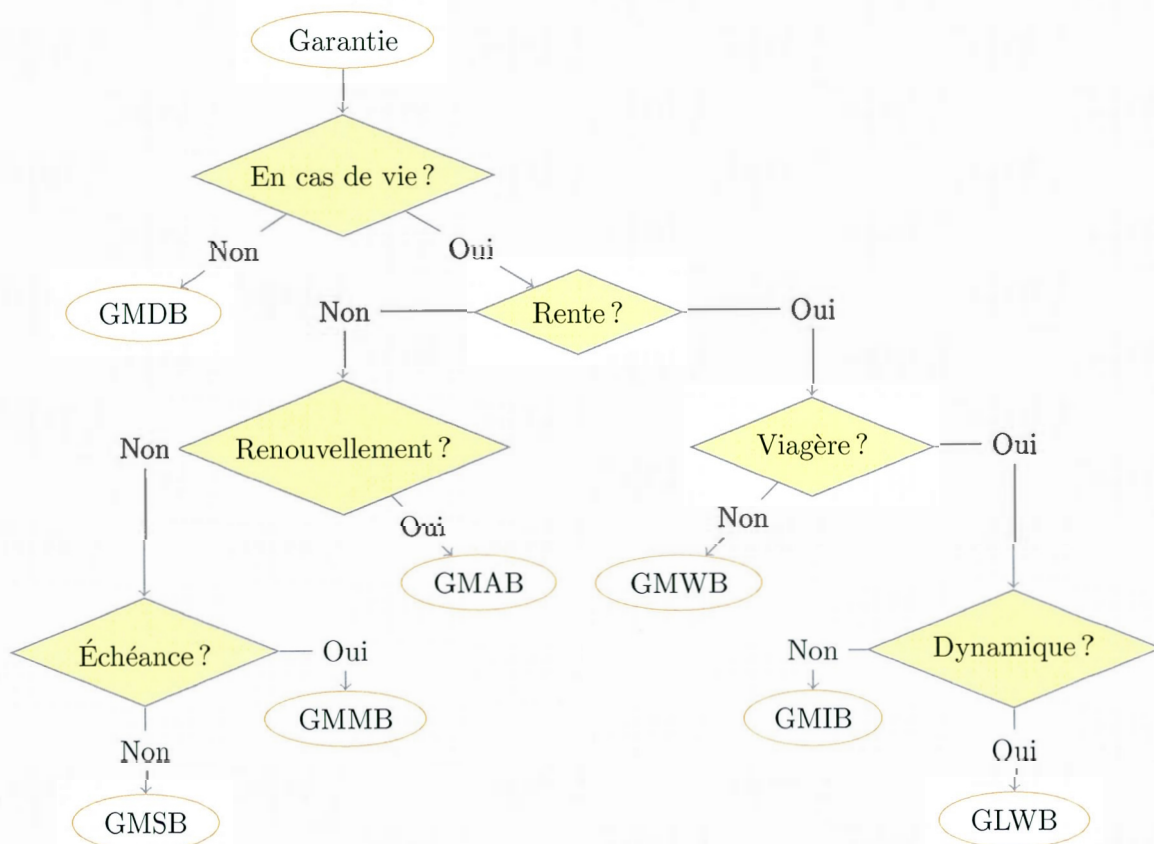
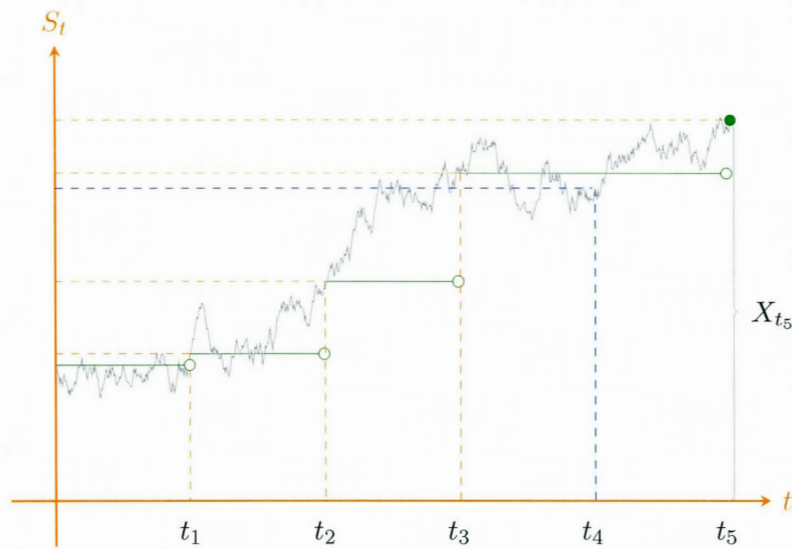


FIGURE 1.1 : Différents types de garanties

Cette garantie introduite en 2004 accorde une rente viagère en permettant le possible rachat total, ce qui la différencie de la garantie GMIB.

La figure (1.1), illustre les différents types de garanties.

Comme mentionné précédemment, le montant garanti peut être modifié pour ajouter d'autres spécifications telles que : *ratchet* qui offre comme garantie la valeur maximale du sous-jacent à différentes dates établies dans le contrat. Soit ici t_1, \dots, t_5 , comme illustré ci-dessus à la figure (1.2), dans cet exemple particulier, la valeur de l'actif sous-jacent au temps t_4 est inférieur à $X_{t_4} = \max\{S_{t_1}, \dots, S_{t_4}\}$, donc son *ratchet* X_{t_4} a la même valeur qu'au temps t_3 , et la valeur finale du *ratchet* X_{t_5} a la même valeur que le sous-jacent

FIGURE 1.2 : Garantie avec *ratchet*

S_{t_5} car elle est la valeur maximale pour les temps convenus.

Une autre modification de la valeur garantie est nommée *rollup*. Elle capitalise le montant initial à un taux convenu. On peut même solliciter en même temps le *ratchet* et le *rollup* dont la valeur à terme sera le maximum obtenu pour chacune des garanties, c'est-à-dire le maximum entre X_{t_5} et le *rollup*. Comme illustré ci-dessous à la figure (1.3), la valeur finale est celle du *rollup*.

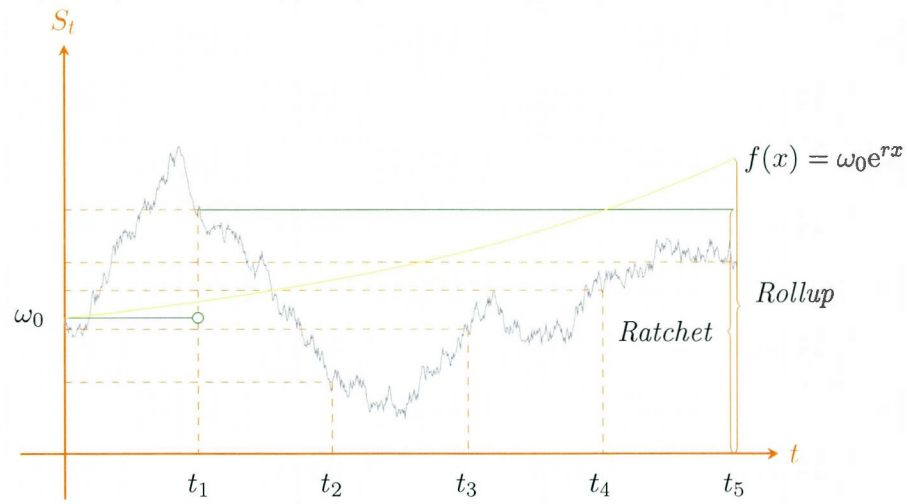


FIGURE 1.3 : Garantie avec *ratchet* et *rollup*

1.2 Revue de la littérature

Dans la présentation de Boyle et al. (2005), ils se sont intéressés à montrer la façon de trouver la valeur de la prime, en utilisant la méthode de Monte Carlo, sans entrer dans une étude rigoureuse de la solution.

Milevsky et Salisbury (2006) ont publié un article qui associe pour la première fois les options asiatiques et la valeur d'une garantie GMWB. Dans cet article, ils ont affirmé que pour satisfaire rapidement les besoins du client, les assureurs ont offert la garantie GMWB à un prix sous-estimé selon leurs analyses sous le postulat d'une lognormalité de l'action. Nous ferons une recherche plus approfondie de cette affirmation, mais pour commencer, il faut faire certaines hypothèses sur les types de retraits, tels que les retraits discrets ou continus et les retraits prédéterminés ou optimaux.

1.2.1 Retraits prédéterminés (statiques)

Il s'agit de certains montants de retraits déjà prédéfinis dans le contrat. Ceci rend la modélisation du produit plus simple, car il n'implique pas de retraits inconnus et de plus,

on peut planifier une couverture d'une durée prédéterminée. Un an après la présentation de Boyle et al. (2005), Milevsky et Salisbury (2006) supposent que les retraits sont faits de façon continue, ce qui est plus convenable pour la modélisation. De toute façon, il s'agit d'une approximation du modèle discret lorsque l'intervalle entre les retraits tend vers zéro.

Ce problème a été décomposé en valeur actualisée des montants fixés et la valeur d'une option quanto de vente asiatique avec moyenne arithmétique par Milevsky et Salisbury (2006). Comme cette approche implique les options asiatiques, nous profiterons qu'il y ait déjà un marché établi pour elles, ce qui facilite leur couverture et rend le GMWB un produit plus familier.

Milevsky et Salisbury (2006) ont trouvé une sous-tarification sous le modèle de Black-Scholes dont le taux d'intérêt et la volatilité sont constants. C'est pour cette raison qu'afin de rendre le modèle plus réaliste, Peng et al. (2009) décrivent le produit avec l'hypothèse d'un taux d'intérêt stochastique qui suit le modèle de Vasicek. Ils travaillent avec retraits continus, variables et prédéterminés dans le contrat.

Peng et al. (2009) ont trouvé une borne supérieure et une borne inférieure pour la valeur de la garantie en utilisant comme points de références pour chaque borne les travaux faits par Thompson (1999) et Rogers et Shi (1995) respectivement. Ils ont trouvé que la borne inférieure donnait une meilleure approche à la réponse obtenue par la méthode de Monte Carlo.

D'un autre côté, dans un document de travail, Jaimungal et al. (2012) proposent une solution au problème dans le scénario d'un taux d'intérêt et d'une volatilité stochastiques qui suivent certains modèles. Ceci implique trois dynamiques : celle du sous-jacent, celle du taux d'intérêt et celle de la volatilité.

Résoudre ce problème en utilisant une méthode aux différences finies traditionnelle peut être très lourd du point de vue computationnel. C'est pour cette raison qu'ils utilisent une méthode implicite de direction alternée pour trouver la solution au problème d'équations

aux dérivées partielles, ce qui est, dans les grandes lignes, une méthode pour réduire un problème de n dimensions à n problèmes d'une dimension.

Deelstra et Rayée (2012) travaillent pour repérer le prix d'une garantie GMIB (garanties de table ou de taux pour la conversion de la rente) qui est très relié à une garantie GMLB sous l'hypothèse d'un taux qui suit un modèle de Hull-White et une volatilité locale.

Dans ce mémoire, nous travaillerons avec un GMWB, mais sans tenir compte de la mortalité.

1.2.2 Retraits dynamiques

Supposons maintenant que l'assuré n'ait pas un montant convenu de retrait dans le contrat, c'est-à-dire qu'il peut retirer des montants variables aux moments qu'il le désire. Donc, du point de vue de l'assureur, cela peut amener à de grandes pertes. Pour ces raisons, il faudra trouver la valeur de la stratégie de retrait de l'assuré qui optimise son profit.

Milevsky et Salisbury (2006) résolvent le problème de la couverture pour ce type de retrait, en s'inspirant de la méthode de frontière libre utilisée pour trouver le moment optimal où on doit exercer une option de vente américaine. Cependant, à la différence des options américaines, la prime n'est pas payée au début du contrat, mais pendant la période du contrat. En fait, le problème peut être réduit à un problème de point fixe où étant donné que le pourcentage de pénalité pour un retrait supérieur au montant est fixé dans le contrat. On établit de façon arbitraire un pourcentage initial de frais et on détermine la stratégie optimale de retraits, ce qui nous donne le coût initial de la rente temporaire et la garantie. On réitère ce processus en utilisant un autre pourcentage pour les frais, jusqu'à ce que cette valeur soit égale au montant investi au début.

Dans certains contrats, si le montant de retrait est supérieur au montant convenu dans le contrat, celui-ci entraînera un réajustement de la garantie. La garantie sera remise au

minimum de la garantie en vigueur. Ceci a pour effet de décourager l'assuré à faire un retrait supérieur au montant fixé avant de faire un rachat total ou attendre la maturité du contrat. Alors, dans les grandes lignes, il est dans l'intérêt de l'assuré de trouver le temps optimal d'arrêt ou le temps de rachat total, c'est-à-dire le moment où la valeur actuelle de frais est supérieure à la valeur actuelle des bénéfices futurs.

Après le travail de Milevsky et Salisbury (2006) deux grandes approches ont été faites :

La première approche est faite par Chen et Forsyth (2008), qui suggèrent la formulation d'un contrôle impulsif dont la preuve de convergence vers la solution de viscosité d'Hamilton Jacobi Bellman est fournie dans cet article.

La deuxième analyse est faite par Dai et al. (2008), qui proposent un algorithme à partir d'un contrôle stochastique singulier au problème en utilisant les équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman qui sont résolues par une méthode numérique de différences finies avec un schéma implicite, la contribution de l'article de Dai et al. (2008) par rapport à celui de Milevsky et Salisbury (2006), est l'inclusion des conditions auxiliaires pour le cas continu (conditions aux bornes). En plus, Dai et al. (2008) font la modélisation dans le cas plus réaliste où les retraits sont faits de façon discrète.

Dans la modélisation de Dai et al. (2008), ils démontrent qu'il y a deux valeurs optimales pour les retraits à un moment déterminé : le montant fixé et le rachat total du fonds. Pour cette raison, dans la plupart des contrats, il y a déjà une pénalité établie pour les retraits supérieurs aux montants fixés et une diminution de la garantie.

Par la suite, Chen et al. (2008) affirment que lorsque les frais sont divisés en frais de gestion et frais au titre de garantie, les dérivés présentent une augmentation de prix, une assertion qui peut être vérifiée sur le marché aux États-Unis. Ils décrivent la pénalité de retraits supérieurs au montant du contrat en utilisant un tableau et ils s'intéressent aussi aux processus à saut de la bourse, ce qui est aussi proposé dans l'article.

Les travaux précédents se basent sur les équations différentielles reliées au problème, mais on peut aussi adopter une autre méthode pour trouver le moment optimal de rachat

en utilisant la méthode de Monte Carlo.

Cette méthode a été souvent utilisée pour trouver le moment optimal d'un rachat total dans une garantie en cas de décès. Bacinello et al. (2009) emploient avec des régressions par moindres carrés en supposant que le taux suit un modèle Cox–Ingersoll–Ross, que la volatilité et la mortalité sont stochastiques et qu'il y a des sauts dans le marché.

Holz et al. (2007) étudient les garanties GLWB (garanties de revenus viagers) et ils décrivent la condition qui doit être satisfaite pour obtenir de retraits optimaux. Une stratégie de retraits est optimale si on fait des retraits égaux au montant établi dans le contrat jusqu'à ce que la valeur du fonds moins les frais de pénalisation soit supérieure à la rente restante du montant défini dans le contrat (la même affirmation de Dai et al. (2008)).

Kling et al. (2011) étudient aussi la dynamique de couverture avec différentes lettres grecques pour une garantie GLWB où l'action a une volatilité stochastique.

CHAPITRE II

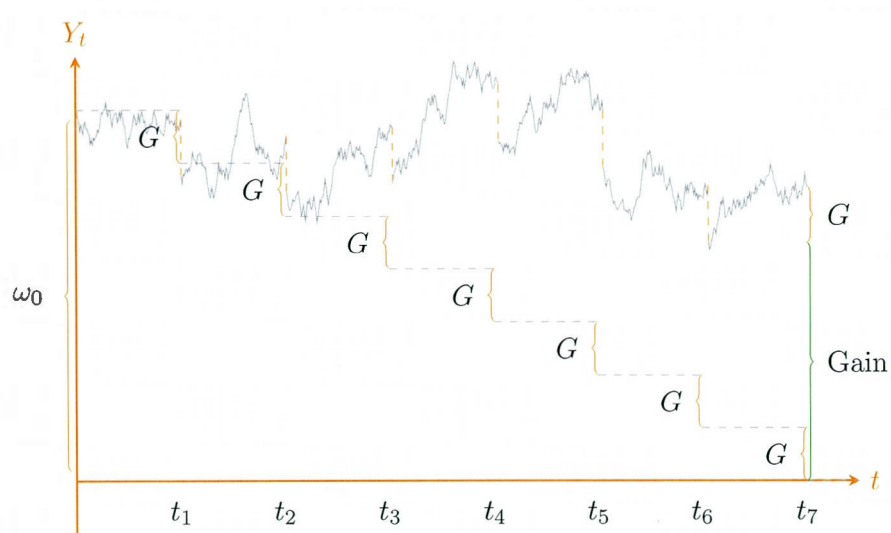
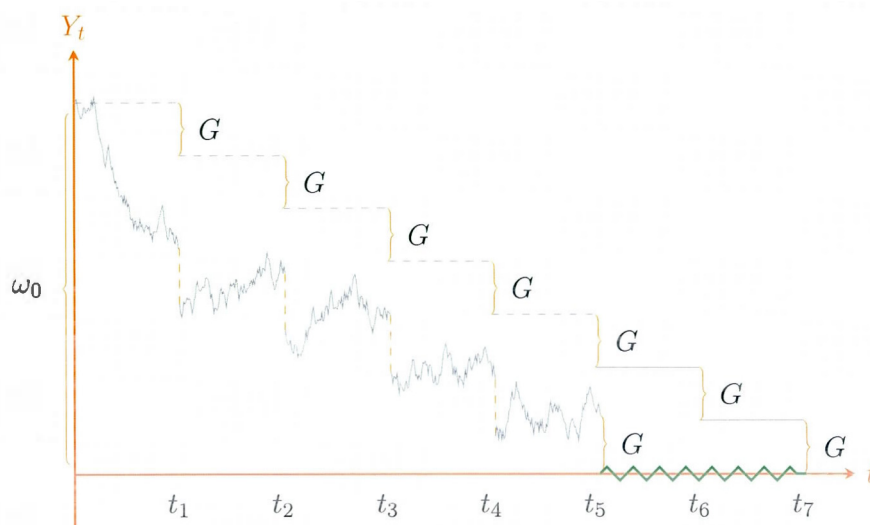
RETRAITS MINIMUMS GARANTIS (GMWB)

2.1 Contexte

Supposons qu'un assuré souhaite utiliser son capital pour obtenir un versement annuel prédéterminé G pendant une période définie de n années. Si son capital n'est pas investi, il aura besoin d'un montant initial ω_0 égal à nG pour payer une rente temporelle qui verse G à la fin de la période.

Dans un scénario particulièrement favorable, une personne peut même obtenir ses n versements de G plus un montant additionnel qui est la valeur du fonds au moment T , comme illustré dans la figure (2.1) (où on montre de façon parallèle, l'investissement et la garantie à chaque moment). Pour cette raison, la personne sera tentée de placer son épargne dans le marché.

Cependant dans un scénario financier défavorable, où l'on subit de grandes pertes dans les premières années, on ne peut même pas s'attendre à recevoir les versements convenus au début, ce qui nous amène à considérer le risque de marché expliqué dans la figure (2.2).

FIGURE 2.1 : Scénario favorable pour l'assureur ($n=7$)FIGURE 2.2 : Scénario défavorable pour l'assureur ($n=7$)

2.2 La garantie de revenus temporaire (GMWB)

Cette garantie instaurée en 2002 offre une protection au client contre le risque de possibles fluctuations défavorables du marché en lui garantissant, pour une période établie, des retraits dont la valeur actuelle est le montant initial (le taux est convenu dans le contrat).

Dans l'exemple précédent, le retrait G est fixé et le *rollup* a un taux de zéro pourcent. La garantie sera activée dans le scénario défavorable figure (2.2) pendant la quatrième année. Donc, l'assureur doit prendre en charge les revenus garantis, jusqu'à ce que la rente temporelle de 7 années soit entièrement payée.

Cette garantie peut avoir une phase d'accumulation avant les retraits. On supposera dans notre modélisation qu'il n'y en a pas, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de période différée.

À première vue, la garantie GMWB ressemble beaucoup à une garantie GMIB temporaire, mais les rentes commencent à différents moments dans le temps. Dans le GMWB, on investit et on peut commencer à recevoir la rente immédiatement, tandis que dans le GMIB, on commence à la percevoir après une période de délai. Et en plus, à chaque période établie dans le GMWB, l'assuré peut faire des retraits supérieurs au montant établi dans le contrat ou même faire un rachat total.

En plus de pouvoir faire des retraits supérieurs au montant convenu, un autre avantage du GMWB, est que si l'actif sous-jacent est en hausse, l'assuré peut choisir de ne pas faire de retraits ou de diminuer le montant pour profiter du marché.

Généralement, ces retraits sont faits à chaque année ou à tous les six mois et ils peuvent être fixes ou variables.

2.3 Modélisation

Dans cette section, nous allons définir la notation et les dynamiques du fonds et du sous-jacent, afin de déterminer la valeur actualisée espérée du fonds à la date d'échéance et nous relierons les variables pour obtenir le pourcentage de la prime que doit payer

l'assureur pour la garantie.

2.3.1 Notation

La garantie GMWB offre une protection à l'assuré contre le risque financier d'un fonds qui a comme seul actif sous-jacent une action (S_t) , en échange d'une prime proportionnelle à S_t , dont la valeur du pourcentage est α . Cette garantie lui permet d'effectuer des retraits $f(\gamma_t)$ du fonds W_t dont la valeur est égale ou plus grande que la valeur garantie A_t aux moments déjà prédéterminés. Nous allons nous placer sur un espace de probabilité complet $(\Omega; \mathcal{F}; \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$, $T > 0$, où \mathbb{P} est la mesure de probabilité réelle. Nous supposons que l'actif sous-jacent a la dynamique suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t^{\mathbb{P}},$$

où

$B_t^{\mathbb{P}}$: mouvement Brownien dans la mesure réelle.

μ : Le taux de rendement de S continu.

r : Le taux sans risque continu.

G : Le retrait prédéterminé au sein du contrat.

γ_t : Le retrait demandé par l'assuré au temps t .

$f(\gamma_t)$: Le retrait effectué par l'assuré au temps t après la pénalisation.

\widetilde{W}_t : La valeur du fonds à la date t .

W_t : $\max(\widetilde{W}_t, 0) = \widetilde{W}_t^+$.

V_t : La valeur du fonds W_t plus la valeur actuelle des revenus à déboursier.

α : Le pourcentage de prime payée continuellement.

w_0 : La valeur initiale du fonds.

T : Durée de la garantie ou échéance (w_0/G).

De plus,

$$f(\gamma_t) = \begin{cases} \gamma_t & \text{si } 0 \leq \gamma_t \leq G, \\ \gamma_t - k(\gamma_t - G) & \text{si } G < \gamma_t, \end{cases}$$

où, k est la pénalisation correspondante pour excéder la valeur prédéterminée dans le contrat. \widetilde{W}_t est la valeur du fonds qui a comme actif sous-jacent S , c'est-à-dire

$$d\widetilde{W}_t = (\mu - \alpha)\widetilde{W}_t dt + \sigma\widetilde{W}_t dB_t^{\mathbb{P}} - \gamma_t dt.$$

Si on se place dans un modèle de marché sans arbitrage, on peut affirmer grâce au théorème fondamental d'évaluation des actifs financiers, qu'il existe une mesure martingale équivalente \mathbb{Q} , dont le taux de rendement est r . En plus, si le marché est complet, on peut même garantir que cette mesure est unique. Donc, la dynamique de S_t peut être reformulée dans la mesure neutre au risque de la façon suivante :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t,$$

où $B_t = B_t^{\mathbb{P}} + \frac{\mu-r}{\sigma}t$ est un mouvement brownien sous la mesure neutre \mathbb{Q} au risque et

$$d\widetilde{W}_t = (r - \alpha)\widetilde{W}_t dt + \sigma\widetilde{W}_t dB_t - \gamma_t dt,$$

où $\widetilde{W}_0 = \omega_0$. Une fois que la valeur de \widetilde{W}_t atteint zéro, \widetilde{W}_t restera dans cette valeur par définition.

2.4 Premiers pas vers la tarification

Dans la littérature, ce produit a été tarifié de différentes façons. Il y a deux grandes approches que nous étudierons dans ce mémoire.

2.4.1 Option d'achat

D'après la présentation de Boyle et al. (2005), on peut s'approcher de la valeur du pourcentage de frais de la garantie GMWB de façon intuitive. On sait que

$$\omega_0 = \int_0^T G e^{-ru} du + C_0. \quad (2.1)$$

La valeur déposée au début dans le fonds doit être suffisante pour payer une rente temporelle de G , en plus de ce qui reste dans le fonds, si celui-ci est positif. En d'autres termes, on a une rente temporelle, plus une option d'achat C_0 d'échéance T où l'actif sous-jacent est la valeur du fonds et le prix d'exercice est zéro.

Dans le cas particulier de la figure (2.1), le profit de l'option d'achat est positif tandis que dans la figure (2.2), il est zéro.

2.4.2 Option de vente

Une autre approche de Boyle et al. (2005), explique que la garantie doit avoir une valeur égale au prix d'une option de vente américaine dont le profit est égal à :

$$\mathbb{E} \left(\int_{\tau}^T G e^{-ru} du \right),$$

où τ est le temps optimal d'exercice de l'option, c'est-à-dire le premier moment où le fond atteint zéro. Dans le scénario de la figure (2.1), τ est plus grand que T , donc la valeur de l'intégrale est zéro, tandis que dans la figure (2.2), τ est égal à t_4 .

Boyle et al. (2005) trouvent la valeur du pourcentage de la prime α en utilisant la méthode de Monte Carlo, car si on fixe une valeur du α , l'option de vente correspondante doit être égale à la valeur actuelle des primes avant que le fonds atteigne zéro.

Après cette présentation, grâce au travail de Milevsky et Salisbury (2006) et la thèse de Liu (2010), l'option de vente commence à être associée à une option asiatique avec moyenne arithmétique et prix d'exercice fixe et l'option d'achat à une option asiatique avec moyenne arithmétique et prix d'exercice variable (voir annexe pour un rappel des possibles options asiatiques).

Pour les options asiatiques avec moyenne arithmétique, on n'a pas de formules fermées.

Donc, nous trouverons leur valeur par des méthodes numériques.

2.5 Modélisation de Milevsky et Salisbury

Nous débuterons par la modélisation de Milevsky et Salisbury (2006) qui se base sur une option de vente asiatique avec moyenne arithmétique et prix d'exercice fixe. Notre but consistera à trouver la valeur actualisée espérée du fonds à la date d'échéance.

Pour commencer avec cette modélisation, nous supposerons que l'actif sous-jacent satisfait toutes les hypothèses du modèle de Black, Scholes et Merton et nous supposerons que les retraits sont faits de façon continue, dont la valeur est prédéterminée et fixe, c'est-à-dire $\gamma_t = G$, ce qui est connu comme l'approche passive ou statique.

La valeur du fonds à la date t avec barrière zéro est $W_t = \max\{\widetilde{W}_t, 0\}$ et sa dynamique est :

$$dW_t = \begin{cases} (r - \alpha)W_t dt + \sigma W_t dB_t - G dt, & 0 \leq t \leq \tau_0, \\ 0, & t > \tau_0. \end{cases}$$

Cette équation est un cas particulier d'une équation linéaire qui peut être résolue en utilisant l'exercice 6.1 du livre de Shreve (2004). On obtient que la solution de cette équation différentielle est

$$W_t = e^{(r - \alpha - (\frac{1}{2})\sigma^2)t + \sigma B_t} \max \left[0, \left(w_0 - G \int_0^t e^{-(r - \alpha - (\frac{1}{2})\sigma^2)s - \sigma B_s} ds \right) \right].$$

Soit $Y_t = e^{-(r - \alpha - (\frac{1}{2})\sigma^2)t - \sigma B_t}$, alors la dynamique pour ce processus stochastique est

$$dY_t = -(r - \alpha - \sigma^2)Y_t dt - \sigma Y_t dB_t \quad (2.2)$$

et donc, on peut réécrire W_t de la façon suivante,

$$W_t = \frac{1}{Y_t} \max \left[0, \left(w_0 - G \int_0^t Y_s ds \right) \right].$$

Afin d'établir au point de départ la prime à payer, nous nous intéresserons à trouver la valeur actualisée de W_T sous la mesure neutre au risque, comme $G = \omega_0/T$ on obtient

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{e^{-rT} \omega_0}{Y_T} \left(1 - \frac{1}{T} \int_0^T Y_t dt \right)_+ \right], \quad (2.3)$$

ce qui représente la valeur d'une option quanto de vente asiatique avec moyenne arithmétique.

2.5.1 Calcul de l'option quanto asiatique de vente avec moyenne arithmétique.

Nous chercherons à trouver la valeur de l'espérance suivante, posons $\omega_0 = 1$ sans perte de généralité.

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{e^{-rT}}{Y_T} \left(1 - \frac{1}{T} \int_0^T Y_t dt \right)_+ \right].$$

Pour y arriver, nous commencerons par définir certaines variables, soit

$$X_t = \int_0^t g_s dY_s,$$

pour $0 \leq t \leq T$ où $g_s = \left(\frac{s-T}{T} \right)$. Donc, on peut écrire $X_t = \int_0^t g_s dY_s = \int_0^t \left(\frac{s}{T} - 1 \right) dY_s$. Par ailleurs, $d(tY_t) = t dY_t + Y_t dt$ d'où $tY_t = \int_0^t s dY_s + \int_0^t Y_s ds$. En divisant par la maturité T et en échangeant les termes, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t Y_s ds &= tY_t - \int_0^t s dY_s \\ \frac{1}{T} \int_0^t Y_s ds &= \frac{t}{T} Y_t - \frac{1}{T} \int_0^t s dY_s \\ &= \frac{t}{T} Y_t + Y_t - Y_t + Y_0 - Y_0 - \frac{1}{T} \int_0^t s dY_s \\ &= \frac{t}{T} Y_t + \int_0^t dY_s - Y_t + Y_0 - \frac{1}{T} \int_0^t s dY_s \\ &= \int_0^t \left(1 - \frac{s}{T} \right) dY_s + \left(\frac{t}{T} - 1 \right) Y_t + Y_0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{T} \int_0^t Y_s ds &= \int_0^t \left(\frac{s}{T} - 1 \right) dY_s - \left(\frac{t}{T} - 1 \right) Y_t - Y_0 \\
 &= \int_0^t g_s dY_s - g_t Y_t - Y_0 \\
 &= \int_0^t g_s dY_s - g_t Y_t - 1.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

(2.5)

Alors, en isolant $\int_0^t g_s dY_s$, X_t peut être réécrit de la façon suivante :

$$X_t = \int_0^t g_s dY_s = 1 + g_t Y_t - \frac{1}{T} \int_0^t Y_s ds,$$

d'où, on peut déduire le calcul suivant,

$$\begin{aligned}
 X_T &= 1 + g_T Y_T - \frac{1}{T} \int_0^T Y_s ds \\
 &= 1 + \frac{T - T}{T} Y_T - \frac{1}{T} \int_0^T Y_s ds \\
 &= 1 - \frac{1}{T} \int_0^T Y_s ds.
 \end{aligned}$$

Donc $(X_T)_+$ est le *payoff* d'une option de vente asiatique avec moyenne arithmétique et prix d'exercice fixe, égal à 1.

Soit $Z_t = \frac{X_t}{Y_t}$, de l'équation (2.5) après quelques calculs, on obtient que $W_t = Z_t - g_t$, en particulier pour $t = T$, $W_T = Z_T$. Maintenant

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{Y_T} \left(1 - \frac{1}{T} \int_0^T Y_t dt \right)_+ \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{Y_T} (X_T)_+ \right] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\left(\frac{X_T}{Y_T} \right)_+ \right] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [(Z_T)_+].
 \end{aligned}$$

Étant donné que

$$\begin{aligned} dZ_t &= \frac{1}{Y_t} dX_t + X_t d\left(\frac{1}{Y_t}\right) + dX_t d\left(\frac{1}{Y_t}\right) \\ &= \frac{1}{Y_t} g_t dY_t + X_t d\left(\frac{1}{Y_t}\right) + g_t dY_t d\left(\frac{1}{Y_t}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{Y_t}\right) &= -\frac{1}{Y_t^2} dY_t + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{Y_t^3} dY_t dY_t \right) \\ &= -\frac{1}{Y_t^2} dY_t + \frac{1}{Y_t^3} \sigma^2(Y_t^2) dt \\ &= \frac{1}{Y_t^2} (Y_t((r - \alpha - \sigma^2)dt + \sigma dB_t)) + \frac{1}{Y_t} \sigma^2 dt \\ &= \frac{1}{Y_t} ((r - \alpha)dt + \sigma dB_t), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} dZ_t &= \frac{1}{Y_t} dX_t + X_t d\left(\frac{1}{Y_t}\right) + dX_t d\left(\frac{1}{Y_t}\right) \\ &= \frac{Y_t}{Y_t} g_t(-(r - \alpha - \sigma^2)dt - \sigma dB_t) + \frac{X_t}{Y_t} ((r - \alpha)dt \\ &\quad + \sigma dB_t) + g_t dY_t (Y_t^{-1}) ((r - \alpha)dt + \sigma dB_t) \\ &= g_t(-(r - \alpha - \sigma^2)dt - \sigma dB_t) + Z_t((r - \alpha)dt + \sigma dB_t) \\ &\quad + \frac{g_t}{Y_t} (Y_t(-(r - \alpha - \sigma^2)dt - \sigma dB_t)) ((r - \alpha)dt + \sigma dB_t) \\ &= g_t(-(r - \alpha - \sigma^2)dt - \sigma dB_t) + Z_t((r - \alpha)dt + \sigma dB_t) - \sigma^2 g_t dt \\ &= -g_t(r - \alpha)dt + Z_t(r - \alpha)dt - \sigma g_t dB_t + Z_t \sigma dB_t \\ &= (r - \alpha)(Z_t - g_t)dt + \sigma(Z_t - g_t)dB_t. \end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème de Feynman-Kac, $f(t, z) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rt}(z_t)^+]$ satisfait à l'équation suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - \alpha)(Z_t - g_t) \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{2} \sigma^2 (Z_t - g_t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = rf, \quad (2.6)$$

avec $f(T, Z) = [Z]_+$, ce qui peut être résolu avec une méthode numérique telle que les différences finies. Nous étudierons en profondeur la solution de cette équation dans un chapitre postérieur.

2.6 Modélisation de Yan Liu

La thèse de Liu (2010) développe en profondeur la présentation de Boyle et al. (2005). Elle utilise, comme base essentielle dans son travail, une option d'achat asiatique avec moyenne géométrique et prix d'exercice variable.

Liu travaille en utilisant l'hypothèse de retraits discrets, ce qui rend le produit plus réaliste. La modélisation de l'option de vente précédente, avec retraits discrets, est développée dans l'article de Dai et al. (2008), pour le cas général de retraits optimaux.

Nous avons mentionné que la prime payable à l'assureur peut être trouvée d'une façon implicite à partir de l'équation (2.1) dans le cas où les retraits sont faits d'une façon continue.

Pour le cas discret, si les retraits sont faits à la fin de la période, on obtient

$$\omega_0 = G \cdot a_{\overline{N}|}^{(1/h)} + C_0, \quad (2.7)$$

où h est la fréquence des retraits dans une année, $N = T \cdot h$, $G = \frac{\omega_0}{N}$, et

$$\begin{aligned} G \cdot a_{\overline{N}|}^{(1/h)} &= \sum_{i=1}^N G e^{-ri/h} \\ &= G \left(\frac{1 - e^{-r(N+1)/h}}{1 - e^{-r/h}} - 1 \right) \\ &= G \frac{e^{-r/h}(1 - e^{-rN/h})}{1 - e^{-r/h}} \\ &= G \frac{1 - e^{-rT}}{e^{r/h} - 1}. \end{aligned}$$

Soit $\{t_0, t_1 = t_0 + \frac{1}{h}, \dots, T = t_N = t_{N-1} + \frac{1}{h}\}$ une partition de $[0, T]$ et R_t le rendement

de 1 \$ dans l'intervalle (t_i, t_{i+1}) , alors

$$R_{t_i} = \frac{Y_{t_i}^{-1}}{Y_{t_{i-1}}^{-1}},$$

et le bilan du fonds est obtenu par

$$W_{t_i} = \max W_{t_{i-1}} R_{t_i} - \frac{\omega_0}{N}, 0.$$

Si on n'impose pas le seuil zéro, on aurait

$$\widetilde{W}_{t_i} = \widetilde{W}_{t_{i-1}} R_{t_i} - \frac{\omega_0}{N}.$$

Maintenant, si nous calculons le fonds à partir de la valeur finale, on obtient

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{t_N} &= \widetilde{W}_{t_{N-1}} R_{t_N} - \frac{\omega_0}{N} \\ &= \left(\widetilde{W}_{t_{N-2}} R_{t_{N-1}} - \frac{\omega_0}{N} \right) R_{t_N} - \frac{\omega_0}{N} \\ &\vdots \\ &= \omega_0 \prod_{i=1}^N R_{t_i} - \frac{\omega_0}{N} \left(1 + R_{t_N} + R_{t_N} R_{t_{N-1}} + \cdots + \prod_{i=2}^N R_{t_i} \right) \\ &= Y_0^{-1} \prod_{i=1}^N R_{t_i} - \frac{Y_0^{-1}}{N} \left(1 + R_{t_N} + R_{t_N} R_{t_{N-1}} + \cdots + \prod_{i=2}^N R_{t_i} \right). \end{aligned}$$

Comme cette équation contient un produit télescopique, alors

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{t_N} &= Y_{t_N}^{-1} - \frac{Y_0^{-1}}{N} \left(1 + R_{t_N} + R_{t_N} R_{t_{N-1}} + \cdots + \prod_{i=2}^N R_{t_i} \right) \\ &= Y_{t_N}^{-1} - \frac{Y_0^{-1}}{N} \left(1 + \frac{Y_{t_N}^{-1}}{Y_{t_{N-1}}^{-1}} + \frac{Y_{t_N}^{-1}}{Y_{t_{N-2}}^{-1}} + \cdots + \frac{Y_{t_N}^{-1}}{Y_{t_1}^{-1}} \right). \end{aligned}$$

Étant donné que $Y_t^{-1} = e^{(r-\alpha-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B_t}$, on a que

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{t_N} &\stackrel{Loi}{=} Y_{t_N}^{-1} - \frac{Y_0^{-1}}{N} \left(1 + e^{(r-\alpha-\frac{\sigma^2}{2})\frac{1}{h}+\sigma B_h} + e^{(r-\alpha-\frac{\sigma^2}{2})\frac{2}{h}+\sigma B_{2h}} + \cdots + e^{(r-\alpha-\frac{\sigma^2}{2})N-1+\sigma B_{N-1}} \right) \\ &= Y_{t_N}^{-1} - \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} Y_{t_k}^{-1} \right). \end{aligned}$$

Donc, la valeur actualisée espérée du fonds à la date d'échéance dans le cas où celle-ci est supérieure à zéro est expliquée par

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r \cdot T}(\widetilde{W}_{t_N}, 0)_+] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-r \cdot T} \left(Y_{t_N}^{-1} - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_{t_k}^{-1} \right)_+ \right], \quad (2.8)$$

c'est-à-dire la valeur d'une option d'achat asiatique avec moyenne arithmétique et prix d'exercice variable. L'équation (2.7) est équivalente à l'équation (2.2). Elles représentent la valeur actuelle espérée du fonds à l'échéance, ce qui relie une option d'achat asiatique arithmétique avec prix d'exercice variable sur l'actif sous-jacent Y_t^{-1} et une option de vente avec un prix d'exercice fixe sur Y_t (si nous faisons un changement de mesure et nous utilisons comme numéraire le sous-jacent Y_t). Pour terminer, il nous reste à trouver la valeur du pourcentage de la prime. Pour atteindre cet objectif, on se sert de l'équation (2.7) et une méthode numérique qui trouve les racines d'une équation.

2.7 La valeur du pourcentage de la prime α

Pour trouver la valeur du pourcentage de la prime α , on va travailler à partir de l'idée proposée dans la section 2.4.1 et l'équation (2.3) en utilisant comme numéraire l'actif sous-jacent. Tout d'abord, $Y_t = e^{-(r-\alpha-(\frac{1}{2})\sigma^2)t-\sigma B_t}$, $Y_0 = 1$ et sa dynamique est donnée par l'équation (2.2) La dérivée de Radon-Nikodym de \mathbb{Q}_S par rapport à \mathbb{Q} est

$$\frac{d\mathbb{Q}_S}{d\mathbb{Q}} = \frac{S_T/S_t}{e^{rT}/e^{rt}} = \frac{e^{\alpha(T-t)}}{e^{r(T-t)}(Y_T/Y_t)},$$

$B_t = B_t^{\mathbb{Q}_S} + \sigma t$, donc $Y_t = e^{-(r-\alpha+(\frac{1}{2})\sigma^2)t-\sigma B_t^{\mathbb{Q}_S}}$ et

$$dY_t = -(r - \alpha)Y_t dt - \sigma Y_t dB_t^{\mathbb{Q}_S}.$$

Maintenant

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{e^{-rT}}{Y_T} \left(1 - \frac{1}{T} \int_0^T Y_t dt \right)_+ \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_S} \left[\left(\frac{e^{\alpha T}}{e^{rT}(Y_T/Y_0)} \right)^{-1} \frac{e^{-rT}}{Y_T} \left(1 - \frac{1}{T} \int_0^T Y_t dt \right)_+ \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_S} \left[e^{-\alpha T} \left(1 - \frac{1}{T} \int_0^T Y_t dt \right)_+ \right] \end{aligned}$$

Donc, la valeur de α peut être établie grâce à l'équation suivante que relie une rente avec la garantie GMWB et le capital initial

$$V(Y, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_S} \left[e^{-\alpha T} \left(\omega_0 - \frac{\omega_0}{T} \int_0^T Y_t dt \right)_+ \right] + \frac{\omega_0}{rT} (1 - e^{-rT}) = \omega_0. \quad (2.9)$$

Cette équation indique que la richesse initiale ou capital investi est égale à la valeur d'une rente temporelle de T années d'un montant ω_0/T plus la valeur maximale entre la valeur actuelle du fonds à sa date d'échéance et zéro.

Avant de terminer ce chapitre, nous décrirons l'approximation lognormale qui est très pratique pour la facilité de son implémentation et qui peut donner rapidement une bonne valeur initiale pour le pourcentage de la prime, lorsqu'on parle de volatilités qui ne sont pas très grandes.

2.8 L'approximation lognormale

La méthode la plus simple pour trouver la valeur de ce type d'options asiatiques, consiste à supposer que la somme de variables lognormales est une variable lognormale. Comme dans Milevsky et Posner (1998), sous cette hypothèse, nous cherchons à déterminer l'espérance et la variance de la moyenne arithmétique du sous-jacent.

Lemme 1. Soient M_1 et M_2 le premier et deuxième moment de $\frac{1}{T-t} \int_t^T S_u du$ respectivement, dans la mesure du sous-jacent. On a que

$$M_1 = \begin{cases} S_t \left(\frac{e^{(r-\alpha)(T-t)} - 1}{(r-\alpha)(T-t)} \right), & r \neq \alpha. \\ S_t, & r = \alpha. \end{cases}$$

$$M_2 = \begin{cases} \frac{2S_t^2}{(T-t)^2} \left(\frac{e^{(2(r-\alpha)+\sigma^2)(T-t)}}{(r-\alpha+\sigma^2)(2(r-\alpha)+\sigma^2)} + \frac{1}{r-\alpha} \left(\frac{1}{2(r-\alpha)+\sigma^2} - \frac{e^{(r-\alpha)(T-t)}}{r-\alpha+\sigma^2} \right) \right), & r \neq \alpha \\ \frac{2S_t^2}{(T-t)^2} \left(\frac{e^{\sigma^2(T-t)} - 1 - \sigma^2(T-t)}{\sigma^4} \right), & r = \alpha. \end{cases}$$

Pour trouver la valeur de la garantie, il suffit d'utiliser l'équation (2.9) et la formule de Black pour une option de vente, avec prix d'exercice égal à 1, $\omega_0 = 1$, taux d'intérêt égal à α , dividendes égal à r , $g = \frac{1}{T}$ et volatilité égale à $-\sigma$. À partir de ces paramètres, on

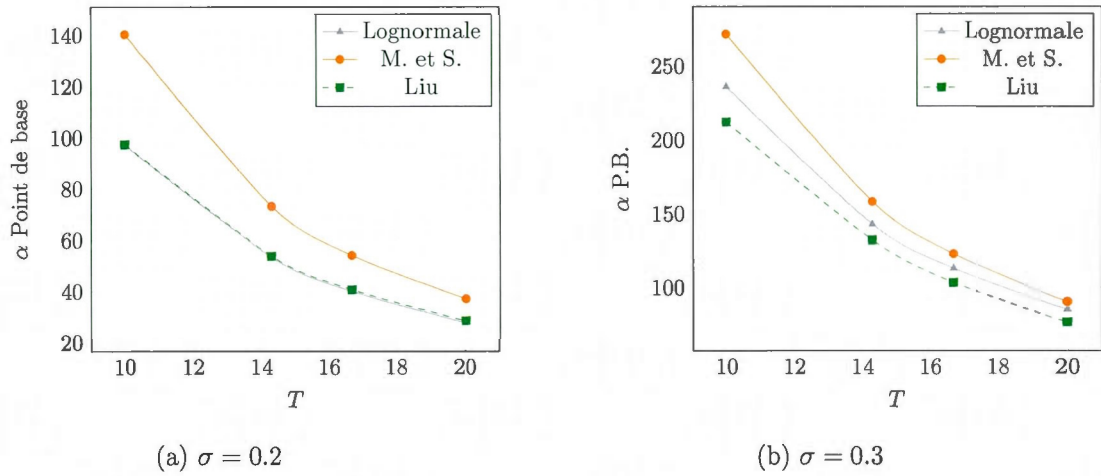


FIGURE 2.3 : Comparaison des valeurs de α obtenues sous lognormalité avec les valeurs obtenues par Liu et Milevsky.

obtient,

$$V = e^{-\alpha T}(\mathcal{N}(-d_2) - M_1 \mathcal{N}(-d_1)) + \frac{1}{rT}(1 - e^{-rt}),$$

où

$$d_1 = \frac{\ln(M_1) + \frac{1}{2}\sigma_L^2 T}{\sigma_L \sqrt{T}}, d_2 = d_1 - \sigma_L = \sqrt{T} \text{ et } \sigma_L^2 \ln\left(\frac{M_2}{M_1^2}\right).$$

Le tableau et la figure (2.3) montrent les valeurs obtenues, sous l'approximation de lognormalité par rapport aux résultats présentés dans l'article de Milevsky et Salisbury (2006) et la thèse de Liu (2010). Les résultats pour une volatilité de 0.2 sont très proches des résultats obtenus par Yan Liu, tandis que pour une volatilité de 0.3, on arrive à des résultats plutôt intermédiaires.

Échéance	Lognormale	Thèse Yan Liu	Milevsky et Salisbury
20	0,002787	0,002851	0,0037
16,67	0,004007	0,004061	0,0054
14,29	0,005332	0,005378	0,0073
10	0,009706	0,009727	0,014

(a) Les paramètres sont : $r=0,05$ et $\sigma=0,2$

Échéance	Lognormale	Thèse Yan Liu	Milevsky et Salisbury
20	0,008509	0,007654	0,009
16,67	0,011342	0,010368	0,0123
14,29	0,014298	0,013225	0,0158
10	0,023569	0,0226	0,0271

(a) Les paramètres sont : $r=0,05$ et $\sigma=0,3$

TABLE 2.3 : Comparaison des valeurs de α obtenues sous lognormalité versus les valeurs obtenues par Liu, Milevsky et Salisbury.

CHAPITRE III

ÉVALUATION DU GMWB PAR SIMULATION

La méthode de Monte Carlo est fondée sur la notion de moyenne empirique, c'est-à-dire, la moyenne des résultats d'un événement dans une série de simulations. Cette méthode suppose l'indépendance entre les trajectoires et se base sur la loi forte des grands nombres.

Cette méthode est très utilisée pour simuler la valeur d'une option et peut être décrite dans les grandes lignes, en quatre étapes : générer un nombre prédéterminé N de trajectoires du sous-jacent, calculer la valeur de l'option pour chaque simulation, estimer sa moyenne et calculer sa valeur actualisée.

Le problème principal est de déterminer le nombre N de simulations qui donne un résultat acceptable. On peut également affirmer que plus la variance du estimateur est grande, plus N doit augmenter pour obtenir une bonne approximation du prix de l'option, ce qui peut être coûteux du point de vue computationnel.

Pour cette raison, on va faire usage des techniques de réduction de variance qui permettent d'augmenter la précision, sans augmenter le temps de calcul, pour calculer la valeur de l'option asiatique reliée à la valeur de la garantie GMWB.

D'après la modélisation de Milevsky et Salisbury, notre but est de trouver la valeur d'une option de vente asiatique quanto avec moyenne arithmétique et avec prix d'exercice constant, tel que donné à l'équation (2.3). On aurait pu aussi utiliser une option d'achat asiatique avec moyenne arithmétique et avec prix d'exercice variable, tel que le fait Liu (2010), mais nous ferons seulement la première approche.

Notre problème principal est que la valeur d'une option asiatique avec moyenne arithmétique ne peut pas être trouvée à partir d'une formule fermée. Donc, dans la première section on utilisera deux schémas pour estimer la valeur de l'option asiatique en utilisant les variables antithétiques comme technique de réduction de variance. Par la suite, on va calculer la valeur approximative d'une option asiatique avec moyenne géométrique, dont la valeur exacte peut être trouvée à partir d'une formule explicite (voir annexe). Nous utiliserons cette option comme variable de contrôle, car le prix d'une option asiatique géométrique est une borne pour la valeur d'une option asiatique arithmétique et aussi une très bonne approximation (voir Lapeyre et Temam (2000)).

3.1 Deux approximations à la valeur d'une option asiatique arithmétique

On va trouver la valeur de l'option de vente dans le cas continu, tel que le font Lapeyre et Temam (2000). On va laisser de côté pour l'instant la recherche d'une option quanto parce qu'il va suffire pour trouver la valeur de cette option d'utiliser une option asiatique conventionnelle dont le taux d'intérêt est α (la valeur du pourcentage de la prime) et le dividende est la valeur du taux d'intérêt r .

3.1.1 Approximation par les sommes de Riemann (schéma 1)

Soient $\{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}\}$ les bornes inférieures d'une partition équidistante de l'intervalle $[0, T]$ et soit $\Delta t = t_i - t_{i-1}$. On cherche à trouver une approximation de la valeur de l'intégrale $\int_0^T S_t dt$. On va donc utiliser les sommes de Riemann,

$$\int_0^T S_t dt \approx \sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i} \Delta t.$$

La valeur de l'option asiatique de vente $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}(K - \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt)_+]$ avec prix d'exercice K sera estimée par un nombre M de trajectoires, c'est-à-dire

$$\frac{e^{-r \cdot T}}{M} \sum_{j=1}^M \left(K - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i}^j \right)_+.$$

3.1.2 Approximation par la méthode du trapèze (schéma 1)

Soient $\{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}\}$ une partition, la valeur de l'intégrale $\int_0^T S_t dt$ peut être approximer par de trapèzes tel qu'on le montre à continuation.

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt &\approx \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t \frac{S_{t_k} + S_{t_{k+1}}}{2} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta t S_{t_k}}{2} \left(1 + e^{(r-\sigma^2/2)\Delta t + \sigma(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})} \right) \\ &\approx \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta t S_{t_k}}{2} (2 + r\Delta t + \sigma(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})) \end{aligned}$$

Les deux approximations de l'option de vente asiatique avec moyenne arithmétique obtenues sont

Schéma 1.

$$\frac{e^{-r \cdot T}}{M} \sum_{j=1}^M \left(K - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i}^j \right)_+$$

Schéma 2.

$$\frac{e^{-r \cdot T}}{M} \sum_{j=1}^M \left(K - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i}^j \left(1 + r \cdot \frac{n}{2T} + \sigma \frac{W_{t_{i+1}} - W_{t_i}}{2} \right) \right)_+$$

Dans le chapitre 2, nous avons introduit la fonction valeur qui établit un lien entre le capital initial et la valeur asiatique d'où on déduit la valeur du pourcentage α en trouvant la racine de l'équation (2.9).

$$V(Y, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_S} \left[e^{-\alpha T} \left(\omega_0 - \frac{\omega_0}{T} \int_0^T Y_t dt \right)^+ \right] + \frac{\omega_0}{rT} (1 - e^{-rT}) - \omega_0 = 0.$$

Dans les tableaux (3.1) et (3.2), nous avons trouvé le pourcentage de la prime à payer pour la garantie GMWB pour deux temps différents, de façon similaire à ce que nous avons fait lorsque nous avons supposé que la moyenne de fonctions lognormale suit une loi lognormale, on a pris comme paramètres les mêmes paramètres utilisés par Milevsky et Salisbury (2006). Pour estimer chaque pourcentage de la prime, nous avons généré

$T = 10$	M	Valeur α	B.I.	B. S.
Schéma 1	400	0,00964185	0,00897098	0,0104325
Schéma 1	1000	0,00959108	0,00908846	0,01013751
Schéma 2	400	0,00967332	0,00898778	0,01045448
Schéma 2	1000	0,00962313	0,00911422	0,01016078

TABLE 3.1 : Valeurs de α obtenues sans variable de contrôle. Les paramètres sont :

$T = 10, r = 0,05, \sigma = 0,2$

B.I.=borne inférieure de l'intervalle de confiance de 95%

B.S.=borne supérieur de l'intervalle de confiance de 95%

M simulations et nous avons discrétisé le temps en 1000 sous-divisions. Afin d'avoir la simulation finale et l'intervalle de confiance de 95 %, nous avons recommencé 100 fois ce schéma. Pour la simulation, on a utilisé les variables antithétiques comme technique de réduction de variance, c'est-à-dire on a fait les simulations en commençant par générer M mouvement brownien standard et on inclut ses opposés.

Les valeurs que nous avons obtenues sont très proches des valeurs obtenues par Liu (2010).

$T = 20$	Num. Sim.(M)	Valeur α	B.I.	B.S.
Schéma 1	400	0,0028143	0,00245041	0,00317121
Schéma 1	1000	0,00281376	0,00255822	0,00306502
Schéma 2	400	0,00283594	0,0024709	0,00319404
Schéma 2	1000	0,00283697	0,00258285	0,00308588

TABLE 3.2 : Valeurs de α obtenues sans variable de contrôle. Avec $T = 20, r = 0,05, \sigma = 0,2$

3.2 Méthode de variable de contrôle

Dans cette section, on va introduire la méthode de variable de contrôle, comme le fait Glasserman. La technique de variable de contrôle est une technique de réduction de variance et elle a comme objectif d'améliorer l'efficacité de la simulation de Monte Carlo. Le principe de cette méthode est d'exploiter l'erreur d'estimation d'une espérance connue pour ajuster l'estimation d'une espérance inconnue. Si les variables aléatoires de l'espérance connue sont corrélées de façon positive aux variables aléatoires de l'espérance inconnue, la sous-estimation de la première espérance pour un estimateur naïf nous indique qu'il y a aussi une sous-estimation avec le même estimateur, lorsqu'on estime la deuxième espérance. Cette méthode est très efficace lorsqu'on travaille avec des options asiatiques.

Soient X et Y , deux variables aléatoires positivement corrélées, où $\mathbb{E}(X)$ est connue. On dispose de n réalisations des variables aléatoires X et Y et on veut trouver une estimation de $\mathbb{E}(Y)$ de telle sorte que l'erreur d'estimation soit plus petite. Soit

$$\hat{\mu}(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k + \beta \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mathbb{E}(X) \right),$$

alors

$$\mathbb{E}(\hat{\mu}(\beta)) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k + \beta \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mathbb{E}(X)\right)\right) = \mathbb{E}(Y),$$

La variance

$$\mathbb{V}(\hat{\mu}(\beta)) = \mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k + \beta \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mathbb{E}(X)\right)\right) = \sigma_Y^2 - 2\beta\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} + \beta^2\sigma_X^2,$$

dont la valeur qui minimise la variance est $\beta = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$.

Cette méthode sera appliquée pour trouver une meilleure approximation au prix d'une option asiatique à moyenne arithmétique, car on connaît la valeur exacte d'une option géométrique.

3.3 Deux approximations de la valeur d'une option asiatique géométrique

Soient $\{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}\}$ les bornes inférieures d'une partition équidistante de l'intervalle $[0, T]$. La moyenne géométrique G_T correspondante de S est

$$\left(\prod_{i=0}^{n-1} S_{t_i}\right)^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log(S_{t_i})}$$

Lorsque la norme de la partition tend vers zéro

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log(S_{t_i}) \approx \frac{1}{T} \int_0^T \log(S_u) du,$$

donc

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{T} \int_0^T \log S_u du} &= e^{\frac{1}{T} \int_0^T (\log(S_0) + (r - \sigma^2/2)u + \sigma B_u) du} \\ &= e^{\log S_0 + (r - \sigma^2/2)\frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T} \int_0^T B_u du} \\ &= S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T} \int_0^T B_u du} \end{aligned}$$

On va approximer $\frac{1}{T} \int_0^T B_u du$ avec les 2 façons suivantes (voir Lapeyre et Temam (2000))

Schéma 1. $\frac{1}{T} \int_0^T B_u du = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} B_{t_k} \Delta t$

Schéma	Valeur	B.I	B.S.	Vraie valeur (3.3)
Schéma 1	0,235674987	0,2342873599	0,2368649	0,2357038
Schéma 2	0,235696859	0,234306782	0,23688917	0,2357038

TABLE 3.3 : Valeurs estimées de la variable de contrôle. Les paramètres sont : $T = 10, r = 0,05, \sigma = 0,2$ et $\alpha = 0,00972781$.

Schéma 2. Approximation de l'intégrale par la méthode du trapèze

$$\frac{1}{T} \int_0^T B_u du = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{B_{t_k} + B_{t_{k+1}}}{2}$$

Le prix de l'option de vente peut donc être écrit comme

$$P_T^{(1)} = \frac{e^{-r \cdot T}}{M} \sum_{j=1}^M \left(K - S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T} \sum_{k=0}^{n-1} h B_{t_k}} \right)_+ \quad (3.1)$$

$$P_T^{(2)} = \frac{e^{-r \cdot T}}{M} \sum_{j=1}^M \left(K - S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{2} (B_{t_k} + B_{t_{k+1}})} \right)_+ \quad (3.2)$$

où $P_T^{(1)}$ et $P_T^{(2)}$ sont les variables de contrôle respectives pour chaque schéma.

3.4 Prix exact d'une option géométrique asiatique

La formule explicite pour le prix d'une option d'achat asiatique avec moyenne géométrique est (voir Jarrow et Rudd)

$$e^{-rT} \mathbb{E}(G_T - K)_+ = S_0 e^{d^*} \mathcal{N}(d) - K \mathcal{N}\left(d - \sigma \sqrt{\frac{T}{3}}\right), \quad (3.3)$$

où

$$d^* = \frac{1}{2} \left(r - \frac{\sigma^2}{6} \right) T$$

$$d = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \frac{1}{2} \left(r + \frac{\sigma^2}{6} \right) T}{\sigma \sqrt{\frac{T}{3}}}$$

et pour une option de vente, le prix exact de l'option est donné par

$$e^{-rT} \mathbb{E}(K - G_T)_+ = -S_0 e^{d^*} \mathcal{N}(-d) + K \mathcal{N}\left(-d + \sigma \sqrt{\frac{T}{3}}\right).$$

3.5 Simulation de l'option asiatique avec moyenne arithmétique

Nous allons maintenant approximer l'option asiatique avec moyenne arithmétique $\mathbb{E}\left(e^{-rT} \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K\right)_+\right)$ (OAA) avec les deux schémas précédents, mais en utilisant comme variable de contrôle l'option asiatique géométrique et ses approximations respectives pour chaque schéma, tel qu'on le montre dans les lignes suivantes

$$\begin{aligned} \text{(OAA)} &\approx \mathbb{E}\left(e^{-rT} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} S_{t_i} - K\right)_+\right) \\ &\quad + \beta \left(e^{-rT} \mathbb{E}\left(\left(S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T} \sum_{k=0}^{N-1} h B_{t_k}} - K\right)_+\right) - S_0 e^{d^*} \mathcal{N}(d) + K \mathcal{N}\left(d - \sigma \sqrt{\frac{T}{3}}\right)\right) \\ &\approx \mathbb{E}\left(e^{-rT} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} S_{t_i} \left(1 + r \cdot \frac{N}{2T} + \sigma \frac{W_{t_{i+1}} - W_{t_i}}{2}\right) - K\right)_+\right) \\ &\quad + \beta \left(e^{-rT} \mathbb{E}\left(\left(S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h}{2} (B_{t_k} + B_{t_{k+1}})} - K\right)_+\right) - S_0 e^{d^*} \mathcal{N}(d) + K \mathcal{N}\left(d - \sigma \sqrt{\frac{T}{3}}\right)\right) \end{aligned}$$

Dans le tableau (3.4), on montre les résultats obtenus pour le schéma 2 avec techniques de réduction de variance pour différents nombres de simulation (nous avons choisi ce schéma pour avoir une convergence plus rapide, voir Lapeyre et Temam (2000)). Dans le tableau (3.5) nous comparons nos résultats avec le schéma 2 avec méthodes de réduction de variance avec les résultats obtenus par Liu, Milevsky et Salisbury. Les résultats sont très proches de ceux de Liu (2010) pour $\sigma = 0,2$ et $\sigma = 0,3$.

T	M	Valeur	B.I.	B.S.
10	400	0,00970288	0,0093188	0,01003434
10	1000	0,00970312	0,00945936	0,0098832
10	2000	0,00969895	0,00956718	0,0098281
10	3000	0,00970826	0,00957545	0,00982738
20	400	0,00284909	0,00264767	0,00304202
20	1000	0,00285832	0,00273437	0,00298887
20	2000	0,00285216	0,00277403	0,0029325
20	3000	0,00285887	0,00279101	0,00293111

TABLE 3.4 : Valeurs de α par le schéma 2 avec variable de contrôle. Avec $r = 0,05$, $\sigma = 0,2$.

T	σ	Valeur	B.I.	B.S.	Liu	Milevsky
10	0,2	0,00970826	0,00957545	0,00982738	0,009727	0,014
20	0,2	0,00285887	0,00279101	0,00293111	0,002851	0,0037
10	0,3	0,02219276	0,02194014	0,0224283	0,0226	0,0271
20	0,3	0,00765985	0,00750209	0,00779575	0,007654	0,009

TABLE 3.5 : Comparaison des valeurs α obtenues avec les valeurs obtenues par Liu et Milevsky. Avec $r = 0,05$, $\sigma = 0,2$

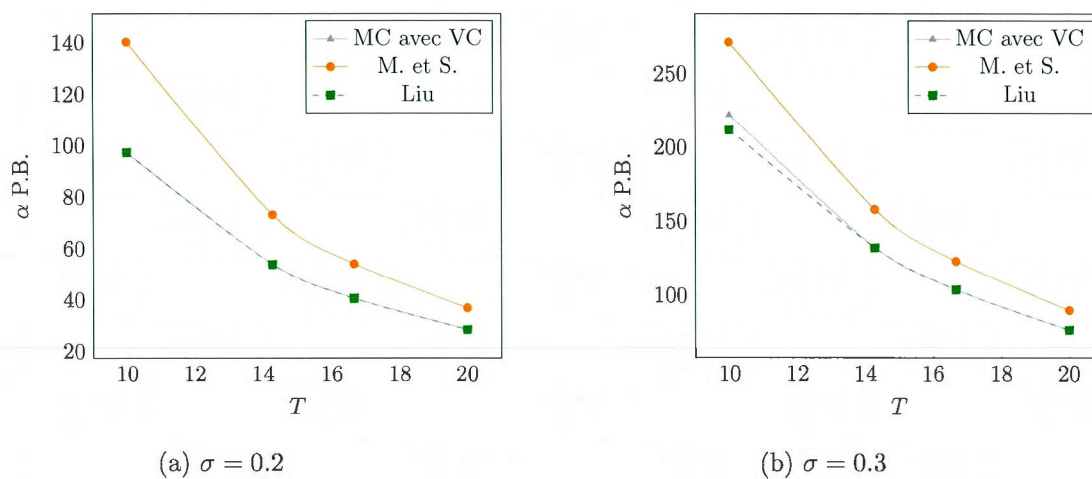


FIGURE 3.1 : Comparaison du pourcentage de la prime α

CHAPITRE IV

ÉVALUATION DU GMWB PAR DIFFÉRENCES FINIES

Les équations aux dérivées partielles ont un rôle très important dans les mathématiques financières, car elles peuvent être utilisées pour calculer le prix d'une option, grâce à l'équation de Black-Scholes, et au théorème de Feynman-Kac. Malheureusement, ce n'est pas dans tous les cas que c'est possible de trouver une solution analytique pour ces équations.

Les différences finies sont des outils qui permettent de trouver une bonne approximation à la solution d'une équation aux dérivées partielles (EDP), lorsque ce n'est pas possible de trouver une solution analytique. Dans les grandes lignes, cette méthode consiste à discrétiser l'équation différentielle de sorte que le problème devienne un problème numérique.

On va illustrer, dans ce chapitre, la méthode de différences finies pour estimer la valeur actualisée de l'option de vente asiatique arithmétique. Nous avons démontré dans la section 2.5.1 que la valeur actualisée du fonds à l'échéance est donnée par l'EDP suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - \alpha)(Z_t - g_t) \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{2} \sigma^2 (Z_t - g_t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = r f,$$

où $g_t = \left(\frac{t-T}{T}\right)$ et $Z_t = W_t + g_t$.

On est intéressé à trouver le prix de l'option au moment zéro. Pour utiliser la méthode

de différences finies, il faut ajouter à l'équation aux dérivées partielles des conditions aux bornes. A moment où les conditions de frontière de l'équation aux dérivées partielles sont établies, on reprend la définition de dérivée pour approcher chacune de ses dérivées partielles comme un quotient et à partir de manipulations algébriques, on arrive à regrouper les termes de la somme selon le temps où ils appartiennent.

Lorsqu'on a regroupé les termes de la somme dans l'équation, on crée une grille à 2 dimensions avec des pas équidistants, où les dimensions représentent les paramètres de la fonction et à partir des conditions de frontière et de l'équation, on recule dans le temps jusqu'à ce qu'on arrive au temps zéro. Une fois rendu là, il nous reste tout simplement à trouver la valeur du point de départ dans la grille. Il y a deux façons possibles pour arriver au temps zéro :

La méthode explicite : Lorsqu'on recule dans la grille, on peut trouver les valeurs inconnues directement à partir de la combinaison linéaire des trois valeurs du temps postérieur, c'est-à-dire sans résoudre un système d'équations, ce qui est très convenable d'un point de vue pratique. Le problème avec cette méthode est qu'elle peut être instable.

La méthode implicite : Il n'y a pas de formule explicite à chaque point de la grille. Donc, il faut résoudre un système d'équations. Cependant, la méthode implicite profite de la stabilité pour toutes les grandeurs de pas choisies pour l'axe du temps et du sous-jacent.

4.1 Approximation des dérivées partielles

La prochaine définition a pour but d'assigner une mesure aux fonctions, afin d'établir une classe d'équivalence parmi elles et de déterminer l'ordre d'erreur pour chaque approximation. Nous allons d'abord décrire les approximations en dimension 1.

Définition 1. Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}$ alors

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)),$$

si et seulement si, il y a deux nombres réels M et x_0 avec M positif, tel que

$$|f(x)| \leq M \cdot g(x), \text{ pour tout } x > x_0.$$

Lemme 2. *En supposant que la fonction f est dérivable jusqu'à l'ordre n , on peut affirmer que :*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h) \\ f'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \\ f''(x) &= \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Preuve. À partir de la série de Taylor on a :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + \frac{1}{6}h^3 f'''(x) + \dots, \quad (4.1)$$

ou

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{f''(\xi^+)}{2!}h^2,$$

pour un $\xi^+ \in (x, x+h)$. Donc

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h),$$

avec $M = \left| \frac{f''(\xi^+)}{2!} \right|$, de façon similaire,

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) - \frac{1}{6}h^3 f'''(x) + \dots, \quad (4.2)$$

ou

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{f''(\xi^-)}{2!}h^2,$$

pour un $\xi^- \in (x-h, x)$. D'où

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x-h) &= 2hf'(x) + \frac{2h^3}{6}(f'''(\xi^+) + f'''(\xi^-)) \\ &= 2hf'(x) + \frac{2h^3}{3} \frac{(f'''(\xi^+) + f'''(\xi^-))}{2} \\ &= 2hf'(x) + \frac{2h^3}{3} f'''(\xi), \end{aligned}$$

donc

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi),$$

où $\xi \in (x-h, x+h)$ pour la continuité de la troisième dérivée. Alors,

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2),$$

avec $M = |\frac{f'''(\xi)}{3}|$, pour la dérivée de deuxième ordre, on a

$$f'' = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{3} f'''(\xi),$$

ou

$$f'' = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2),$$

avec $M = |\frac{f'''(\xi^*)}{3}|$ pour $\xi^* \in (x-h, x+h)$. □

4.1.1 Dérivées du premier ordre

On peut s'approcher des dérivées du premier ordre de trois façons suivantes.

1. Différences finies en avant (Forward difference)

Soit $f_{(i,j)} = f(i\Delta Z, j\Delta t)$

$$\frac{\partial f}{\partial Z} \approx \frac{f_{(i+1,j)} - f_{(i,j)}}{\Delta Z} ; \frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{(i,j+1)} - f_{(i,j)}}{\Delta t},$$

avec des erreurs de $\mathcal{O}(\Delta Z)$ et $\mathcal{O}(\Delta t)$ respectivement. Comme illustré à la figure (4.1), pour les différences finies en avant, la dérivée $\frac{\partial f}{\partial Z}$ représente la pente de la courbe du prix au temps t par rapport à l'actif sous-jacent. Au fur et à mesure que la valeur de ΔZ diminue, la pente de la sécante entre le point $Z + \Delta Z$ et Z donne une meilleure approximation.

2. Différences finies en arrière (Backward difference)

Soit $f_{(i,j)} = f(i\Delta Z, j\Delta t)$

$$\frac{\partial f}{\partial Z} \approx \frac{f_{(i,j)} - f_{(i-1,j)}}{\Delta Z} ; \frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{(i,j)} - f_{(i,j-1)}}{\Delta t},$$

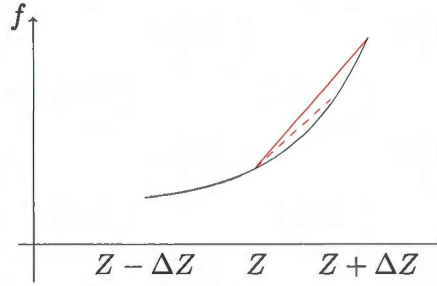


FIGURE 4.1 : Différences finies en avant

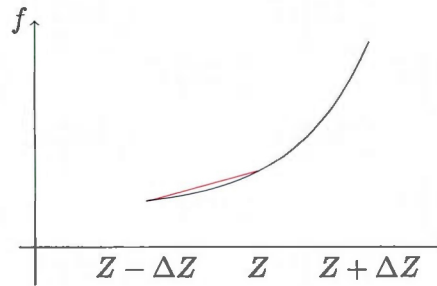


FIGURE 4.2 : Différences finies en arrière

avec des erreurs de $\mathcal{O}(\Delta Z)$ et $\mathcal{O}(\Delta t)$ respectivement. Comme illustré à la figure (4.2), pour les différences finies en arrière, la pente de la courbe du prix est approchée par la pente de la sécante entre le point $Z - \Delta Z$ et Z et au fur et à mesure que la valeur de ΔZ diminue, l'approximation est meilleure.

3. Différences centrales

$$\frac{\partial f}{\partial z} \approx \frac{f_{(i+1,j)} - f_{(i-1,j)}}{2\Delta Z} ; \frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{f_{(i,j+1)} - f_{(i,j-1)}}{2\Delta t},$$

avec des erreurs plus petites que les approximations précédentes de $\mathcal{O}((\Delta Z)^2)$ et $\mathcal{O}((\Delta t)^2)$, respectivement, donc cette approche sera préférable aux deux approches précédentes. Pour cette raison, on va l'utiliser pour discrétiser la variable du sous-jacent. Voir figure (4.3).

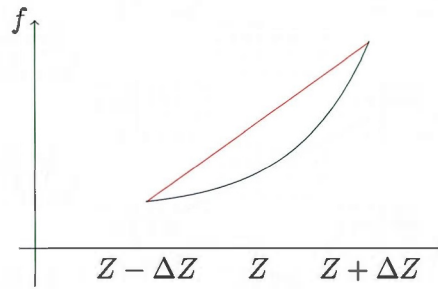


FIGURE 4.3 : Différences centrales

4.1.2 Dérivée d'ordre 2

La dérivée d'ordre 2 par rapport à la variable Z a l'approche suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} &\approx \left(\frac{f_{(i+1,j)} - f_{(i,j)}}{\Delta Z} - \frac{f_{(i,j)} - f_{(i-1,j)}}{\Delta Z} \right) / \Delta Z \\ &= \frac{f_{(i+1,j)} - 2f_{(i,j)} + f_{(i-1,j)}}{\Delta Z^2}, \end{aligned}$$

avec une erreur de $\mathcal{O}((\Delta Z)^2)$.

4.2 Construction de la grille

Selon les hypothèses de Black-Scholes (intérêt et volatilité constants), on travaille dans une grille à deux dimensions, où l'abscisse fait référence au temps et l'ordonnée représente la variable Z , comme illustré à la figure (4.4). La grille sera construite avec de pas équidistants et dépendant de la méthode choisie, la valeur du pas de temps et du sous-jacent pourrait être déterminante, comme on va le voir tout au long de cette analyse.



FIGURE 4.4 : Grille

4.3 Méthode explicite

On parle d'un schéma explicite lorsqu'il permet de calculer la valeur de l'option par un simple produit de matrice, c'est-à-dire sans aucune inversion de matrice ou résolution de système linéaire.

Reprenons notre objectif, nous voulons discrétiser l'équation aux dérivées partielles suivante avec une méthode explicite

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - \alpha)(Z_t - g_t) \frac{\partial f}{\partial Z} + \frac{1}{2} \sigma^2 (Z_t - g_t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} = r f,$$

où $g_t = \left(\frac{t-T}{T}\right)$.

On prend les différences en avant pour la variable du temps (*forward*) et pour la variable Z , on utilisera les différences centrales parce qu'elles ont l'erreur la plus petite. Toutefois, l'astuce se trouvera dans l'indice du temps $j + 1$ pour définir la dérivée partielle du premier et deuxième ordre pour la variable Z , tel qu'on le démontre dans les lignes suivantes.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial Z^2}(i\delta z, (j+1)\delta t) \approx \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1}}{\delta z^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial z} \approx \frac{f_{(i+1,j+1)} - f_{(i-1,j+1)}}{2\delta z}$$

et par la suite, on va remplacer les dérivées partielles respectives dans l'EDP originale où on obtient

$$\begin{aligned} \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\delta t} + (r - \alpha)(z_i - g_j) \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1}}{2\delta z} \\ + \frac{1}{2} \sigma^2 (z_i - g_j)^2 \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1}}{\delta z^2} \\ = r f_{i,j+1}, \end{aligned}$$

il ne reste qu'à regrouper les variables selon l'indice du temps.

$$\begin{aligned} \frac{f_{i,j}}{\delta t} = & f_{i-1,j+1} \left(-\frac{(r - \alpha)(z_i - g_j)}{2\delta z} + \frac{\sigma^2 (z_i - g_j)^2}{2(\delta z)^2} \right) \\ & + f_{i,j+1} \left(\frac{1}{\delta t} + \frac{\sigma^2 (z_i - g_j)^2}{(\delta z)^2} - r \right) \\ & + f_{i+1,j+1} \left(\frac{(r - \alpha)(z_i - g_j)}{2\delta z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2 (z_i - g_j)^2}{(\delta z)^2} \right) \right) \end{aligned}$$

La figure (4.5) illustre la forme dont la grille a été construite. Le nombre total de pas pour la variable temps est N et M pour la variable du sous-jacent. La valeur à l'intérieur de la grille au point $(M - 1, N - 1)$ est obtenue à partir d'une interpolation linéaire des points (M, N) , $(M - 1, N)$ et $(M - 2, N)$ et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive au temps zéro.

Lorsqu'on a introduit la méthode explicite pour résoudre l'équation aux dérivées partielles, on a mentionné qu'elle pouvait avoir des problèmes de stabilité, c'est-à-dire la différence entre la solution numérique et la solution exacte pouvait ne pas être bornée (par exemple, l'équation du transport, voir Brandimarte 2002). Pour cette raison, on préférera des méthodes implicites ou des combinaisons linéaires entre la méthode explicite et la méthode implicite, comme la méthode de Crank-Nicholson.

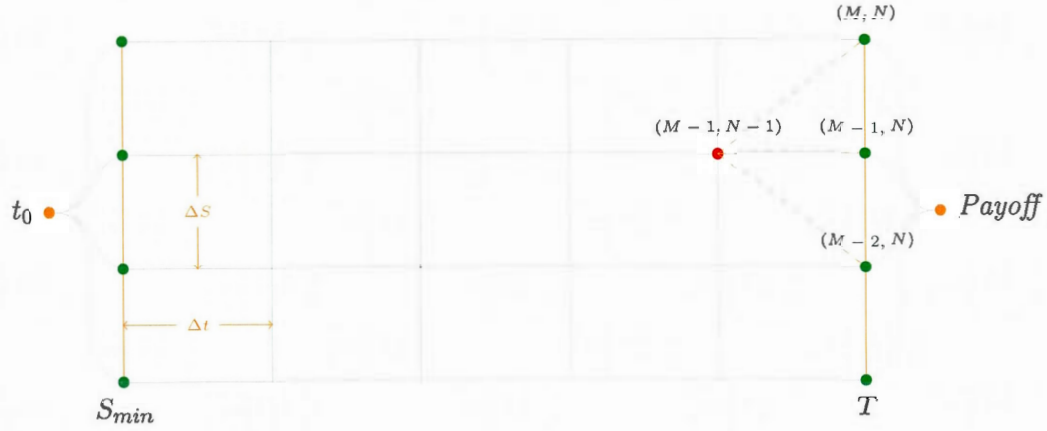


FIGURE 4.5 : Schéma explicite aux différences finies

4.4 Méthode implicite

Dans cette méthode les valeurs seront trouvées d'une façon implicite, c'est-à-dire à partir d'un système d'équations. Reprenons encore une fois notre EDP

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - \alpha)(Z_t - g_t) \frac{\partial f}{\partial Z} + \frac{1}{2} \sigma^2 (Z_t - g_t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} = r f,$$

où $g_t = (\frac{t-T}{T})$. Pour la méthode implicite, on va discrétiser l'équation en utilisant les différences par l'avant avec la variable du temps et pour la variable Z les différences centrales, mais contrairement au schéma précédent, l'indice du temps va être j et non $j + 1$, comme on le montre dans les lignes suivantes,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial Z^2}(i\Delta z, j\Delta t) \approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\delta z^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial z} \approx \frac{f_{(i+1,j)} - f_{(i-1,j)}}{2\Delta z}.$$

Comme dans le cas précédent, on remplace les dérivées partielles dans l'équation et on obtient

$$\begin{aligned} r f_{i,j} = & \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\delta t} + (r - \alpha)(z_i - g_j) \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\delta z} \\ & + \frac{1}{2} \sigma^2 (z_i - g_j)^2 \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\delta z^2}. \end{aligned}$$

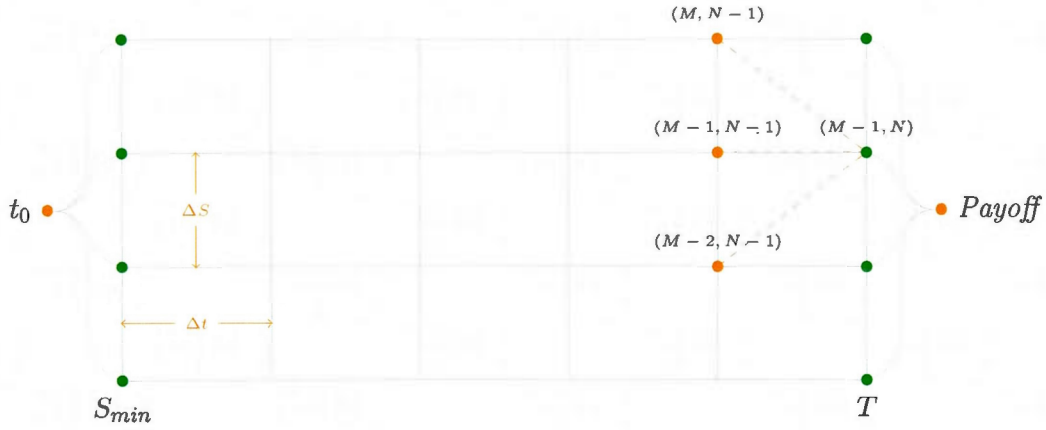


FIGURE 4.6 : Schéma implicite aux différences finies

En regroupant selon la variable du temps, on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{f_{i,j+1}}{\delta t} &= -f_{i-1,j} \left(-\frac{(r-\alpha)(z_i - g_j)}{2\delta z} + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2(z_i - g_j)^2}{(\delta z)^2} \right) \\
 &= -f_{i,j} \left(-\frac{1}{\delta t} - \frac{\sigma^2(z_i - g_j)^2}{(\delta z)^2} - r \right) \\
 &= -f_{i+1,j} \left(\frac{(r-\alpha)(z_i - g_j)}{2\delta z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2(z_i - g_j)^2}{(\delta z)^2} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Dans la grille de la figure (4.6), on illustre la façon dont la grille a été construite. Il nous reste à résoudre plusieurs systèmes d'équations, comme on le montrera dans le cas général.

4.5 θ -méthode

La θ -méthode est une interpolation de la méthode implicite et explicite. Il faudra résoudre un système d'équations lorsque θ est différent de 1. La méthode sera nommée, selon certains choix de θ ,

FIGURE 4.7 : θ -méthode

$$\theta = \begin{cases} \text{Méthode explicite,} & \theta = 0 \\ \text{Méthode implicite,} & \theta = 1 \\ \text{Crank-Nicholson,} & \theta = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

On utilise une fois de plus l'EDP,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - \alpha)(Z_t - g_t) \frac{\partial f}{\partial Z} + \frac{1}{2} \sigma^2 (Z_t - g_t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} = r f,$$

avec $f(T, Z) = [Z]_+$. On va approcher la dérivée par rapport au temps, pour les différences finies en avant et la variable du sous-jacent avec les différences finies centrales. On obtient

$$\begin{aligned} & \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\delta t} + (r - \alpha)(z_i - g_j) \left(\theta \left(\frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\delta z} \right) + (1 - \theta) \left(\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1}}{2\delta z} \right) \right) \\ & + \frac{1}{2} \sigma^2 (z_i - g_j)^2 \left(\theta \left(\frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\delta z^2} \right) + (1 - \theta) \left(\frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1}}{\delta z^2} \right) \right) \\ & = \theta r f_{i,j} + (1 - \theta) r f_{i,j+1}, \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
& f_{i-1,j+1} \left(-\frac{(r-\alpha)(z_i-g_j)(1-\theta)}{2\delta z} + \frac{\sigma^2(z_i-g_j)^2(1-\theta)}{2(\delta z)^2} \right) \\
& + f_{i,j+1} \left(\frac{1}{\delta t} + \frac{\sigma^2(z_i-g_j)^2(1-\theta)}{(\delta z)^2} - (1-\theta)r \right) \\
& + f_{i+1,j+1} \left(\frac{(r-\alpha)(z_i-g_j)(1-\theta)}{2\delta z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2(z_i-g_j)^2(1-\theta)}{(\delta z)^2} \right) \right) \\
& = -f_{i-1,j} \left(-\frac{(r-\alpha)(z_i-g_j)\theta}{2\delta z} + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2(z_i-g_j)^2\theta}{(\delta z)^2} \right) \\
& = -f_{i,j} \left(-\frac{1}{\delta t} - \frac{\theta\sigma^2(z_i-g_j)^2}{(\delta z)^2} - \theta r \right) \\
& = -f_{i+1,j} \left(\frac{(r-\alpha)(z_i-g_j)\theta}{2\delta z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2(z_i-g_j)^2\theta}{(\delta z)^2} \right) \right).
\end{aligned}$$

En multipliant par δt et en faisant $W_t = z_i - g_j$, on obtient

$$\begin{aligned}
& f_{i-1,j+1} \left(-\frac{\delta t(r-\alpha)W_t(1-\theta)}{2\delta z} + \frac{\delta t\sigma^2W_t^2(1-\theta)}{2(\delta z)^2} \right) \\
& + f_{i,j+1} \left(1 + \frac{\delta t\sigma^2W_t^2(1-\theta)}{(\delta z)^2} - \frac{r\delta t}{2} \right) \\
& + f_{i+1,j+1} \left(\frac{\delta t(r-\alpha)W_t(1-\theta)}{2\delta z} + \frac{\delta t}{2} \right) \\
& = -f_{i-1,j} \left(-\frac{\delta t(r-\alpha)W_t\theta}{2\delta z} + \frac{\delta t}{2} \frac{\sigma^2W_t^2\theta}{(\delta z)^2} \right) \\
& = -f_{i,j} \left(-1 - \frac{\delta t\theta\sigma^2W_t^2}{(\delta z)^2} - \frac{r\delta t}{2} \right) \\
& = -f_{i+1,j} \left(\frac{\delta t(r-\alpha)W_t\theta}{2\delta z} + \frac{\delta t}{2} \left(\frac{\sigma^2W_t^2\theta}{(\delta z)^2} \right) \right).
\end{aligned}$$

Soient

$$\begin{aligned}
 a_t^{j+1} &= \left(-\frac{\delta t(r-\alpha)W_t(1-\theta)}{2\delta z} + \frac{\delta t\sigma^2 W_t^2(1-\theta)}{2(\delta z)^2} \right) \\
 b_t^{j+1} &= \left(1 + \frac{\delta t\sigma^2 W_t^2(1-\theta)}{(\delta z)^2} - \frac{r\delta t}{2} \right) \\
 c_t^{j+1} &= \left(\frac{\delta t(r-\alpha)W_t(1-\theta)}{2\delta z} + \frac{\delta t}{2} \right) \\
 a_t^j &= \left(\frac{\delta t(r-\alpha)W_t\theta}{2\delta z} - \frac{\delta t\sigma^2 W_t^2\theta}{2(\delta z)^2} \right) \\
 b_t^j &= \left(1 + \frac{\delta t\theta\sigma^2 W_t^2}{(\delta z)^2} + \frac{r\delta t}{2} \right) \\
 c_t^j &= \left(-\frac{\delta t(r-\alpha)W_t\theta}{2\delta z} - \frac{\delta t}{2} \left(\frac{\sigma^2 W_t^2\theta}{(\delta z)^2} \right) \right),
 \end{aligned}$$

donc, le problème se réduit à un système d'équations

$$\begin{pmatrix} b_1^{J+1} & c_1^{J+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2^{J+1} & b_2^{J+1} & c_2^{J+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3^{J+1} & b_3^{J+1} & c_3^{J+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}^{J+1} & b_{n-1}^{J+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{1,j+1} \\ f_{2,j+1} \\ f_{3,j+1} \\ \vdots \\ f_{n-2,j+1} \\ f_{n-1,j+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1^J & c_1^J & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2^J & b_2^J & c_2^J & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3^J & b_3^J & c_3^J & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}^J & b_{n-1}^J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{1,j} \\ f_{2,j} \\ f_{3,j} \\ \vdots \\ f_{n-2,j} \\ f_{n-1,j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1^j f_{0,j} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{n-1}^j f_{n,j} \end{pmatrix}$$

Pour le modèle de Crank-Nicholson $\theta = 0,5$, on peut se persuader que $a^{j+1} = -a^j$ et $c^{j+1} = -c^j$

4.6 Conditions de frontière

Une fois le système d'équations déjà établi, il faut déterminer les valeurs des bornes de la grille. Nous avons démontré que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{Y_T} \left(1 - \frac{1}{T} \int_0^T Y_t dt \right) \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [(Z_T)_+].$$

En plus, on a que

$$W_t = \frac{1}{Y_t} \left(1 - \frac{1}{T} \int_0^t Y_s ds \right),$$

donc, trouver la borne à l'échéance pour Z est équivalente à la trouver pour W

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(W_T | \mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{Y_T} \left(1 - \frac{1}{T} \int_0^T Y_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{Y_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{T} \int_0^T \frac{Y_s}{Y_T} ds \middle| \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(W_T | \mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{Y_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] - \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{Y_s}{Y_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] ds \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{Y_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] - \frac{1}{T} \int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{Y_s}{Y_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] ds - \frac{1}{T} \int_t^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{Y_s}{Y_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] ds \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{Y_t}{Y_T \cdot Y_t} \middle| \mathcal{F}_t \right] - \frac{1}{T} \int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{Y_s}{Y_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] ds - \frac{1}{T} \int_t^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{Y_s}{Y_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] ds. \end{aligned}$$

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, alors $\mathbb{E}(e^X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$.

Soit $Z = \frac{Y_t}{Y_T} \sim \mathcal{N}((r - \alpha - \frac{\sigma^2}{2})(T - t), \sigma(T - t)^{1/2})$, on a que $\mathbb{E}(e^Z) = e^{(r - \alpha)(T - t)}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(W_T | \mathcal{F}_t) &= \frac{e^{(r - \alpha)(T - t)}}{Y_t} - \frac{1}{T} \int_0^t Y_s \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{Y_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] ds - \frac{1}{T} \int_t^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{Y_s}{Y_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] ds \\ &= \frac{e^{(r - \alpha)(T - t)}}{Y_t} - \frac{1}{T} \int_0^t Y_s \frac{e^{(r - \alpha)(T - t)}}{Y_t} ds - \frac{1}{T} \int_t^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{Y_s}{Y_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] ds \\ &= \frac{e^{(r - \alpha)(T - t)}}{Y_t} \left(1 - \frac{1}{T} \int_0^t Y_s ds \right) - \frac{1}{T} \int_t^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{Y_s}{Y_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] ds. \end{aligned}$$

Par définition de W_t , on a que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(W_T | \mathcal{F}_t) = W_t e^{(r - \alpha)(T - t)} - \frac{1}{T} \int_t^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{Y_s}{Y_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] ds.$$

Encore une fois, comme $\mathbb{E}(e^Z) = e^{(r-\alpha)(T-t)}$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(W_T \mid \mathcal{F}_t) &= W_t e^{(r-\alpha)(T-t)} - \frac{1}{T} \int_t^T e^{r-\alpha(T-s)} ds \\ &= W_t e^{(r-\alpha)(T-t)} - \frac{1}{T} \left(\frac{e^{(r-\alpha)(T-t)} - 1}{r - \alpha} \right),\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-r(T-t)} W_T \mid \mathcal{F}_t) = W_t e^{-\alpha(T-t)} - \frac{1}{T} \left(\frac{e^{-\alpha(T-t)} - e^{-r(T-t)}}{r - \alpha} \right).$$

Comme $W_t = Z_t - g_t$, on a que la borne supérieure de la grille est

$$(Z_t - g_t) e^{-\alpha(T-t)} - \frac{1}{T} \left(\frac{e^{-\alpha(T-t)} - e^{-r(T-t)}}{r - \alpha} \right).$$

On a trouvé la valeur de frontière pour $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(W_T \mid \mathcal{F}_t)$. La figure (4.8) illustre les valeurs aux bornes de la grille pour l'axe Z et l'axe du temps. Dans le tableau (4.3), nous présentons une comparaison des résultats obtenus en utilisant les différences finies et les résultats obtenus par Milevsky et Salisbury (2006) et Liu (2010), pour différentes valeurs d'échéance. Comme dans le chapitre précédent, on arrive encore une fois aux valeurs très proches à celles obtenues par Liu (2010).

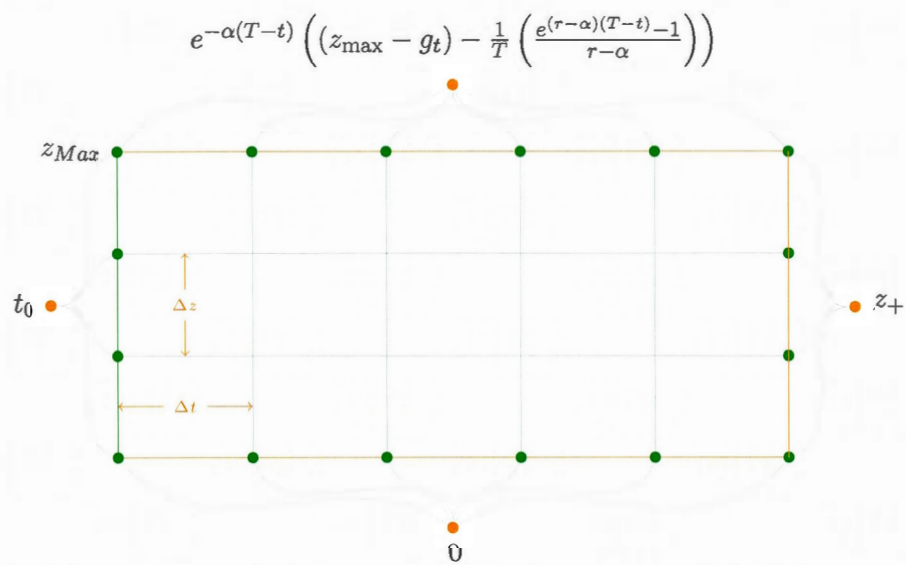
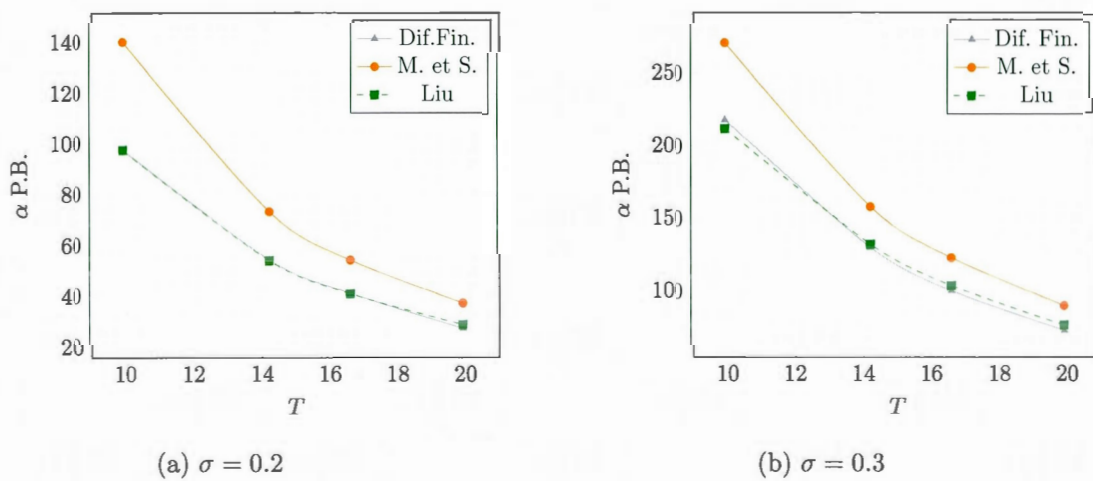


FIGURE 4.8 : Valeurs aux bornes

FIGURE 4.9 : Valeurs de la prime α

Échéance	Dif. Fin.	Thèse Yan Liu	Milevsky et Salisbury
20	0,00287	0,002851	0,0037
16,67	0,00408	0,004061	0,0054
14,29	0,0054	0,005378	0,0073
10	0,009728	0,009727	0,014

(a) Les paramètres sont : $r=0,05$ et $\sigma=0,2$

Échéance	Dif.Fin ^a	Thèse Yan Liu	Milevsky et Salisbury
20	0,0073	0,007654	0,009
16,67	0,010000	0,010368	0,0123
14,29	0,013	0,013225	0,0158
10	0,0218	0,0226	0,0271

(a) Les paramètres sont : $r=0,05$ et $\sigma=0,3$

a. $N=1000, M=200$

TABLE 4.3 : Comparaison des valeurs du pourcentage de la prime α .

CHAPITRE V

AMÉLIORATIONS DU MODÈLE

Dans cette section, nous étudierons l'effet de la variation du taux d'intérêt et de la volatilité sur la prime. Pour l'illustrer, nous allons d'abord calculer les valeurs du pourcentage de la prime α , pour différentes valeurs fixes de r et σ , tel que le montre le tableau (5.1). Nous pouvons constater, dans la figure (5.1), que lorsque le taux d'intérêt augmente, la valeur de α commence à diminuer de façon exponentielle, due à la probabilité de déclenchement de la garantie qui décroît, contrairement à la volatilité qui augmente d'une façon presque linéaire. Cette figure nous montre l'importance du choix du taux et de la volatilité dans le modèle, mais pour rendre le modèle plus réaliste, il faudrait que la volatilité ainsi que le taux d'intérêt dépendent du temps et en plus, dépendant d'une façon non déterministe, ce qui rend nécessaire de modéliser stochastiquement.

Dans les premières sections, on étudiera les effets des changements du taux d'intérêt et de la volatilité dans la valeur du pourcentage de la prime α sous le modèle de Vasicek (tel que le font Peng et al. (2009)) et Heston et finalement, on va faire une brève introduction à la garantie GMWB avec de retraits optimaux en suivant les idées se trouvant dans l'article de Dai et al. (2008).

$\sigma \backslash r$	0,01	0,02	0,03	0,05	0,07	0,09	0,1
0,1	0,0169	0,0084	0,0042	0,0011	0,00025	0,00007	0,00001
0,15	0,0319	0,0186	0,0112	0,00458	0,00185	0,00068	0,00045
0,17	0,0393	0,023	0,0147	0,00638	0,00276	0,00121	0,00078
0,2	0,0475	0,0299	0,0197	0,009727	0,00493	0,00225	0,00178
0,22	0,0557	0,0347	0,0236	0,01185	0,0061	0,0031	0,0022
0,25	0,0631	0,042	0,0288	0,0157	0,00901	0,0047	0,00395
0,3	0,0785	0,0542	0,0381	0,0223	0,0137	0,0077	0,00573

TABLE 5.1 : Comparaison de la valeur des frais α .
Paramètres : $T=10$

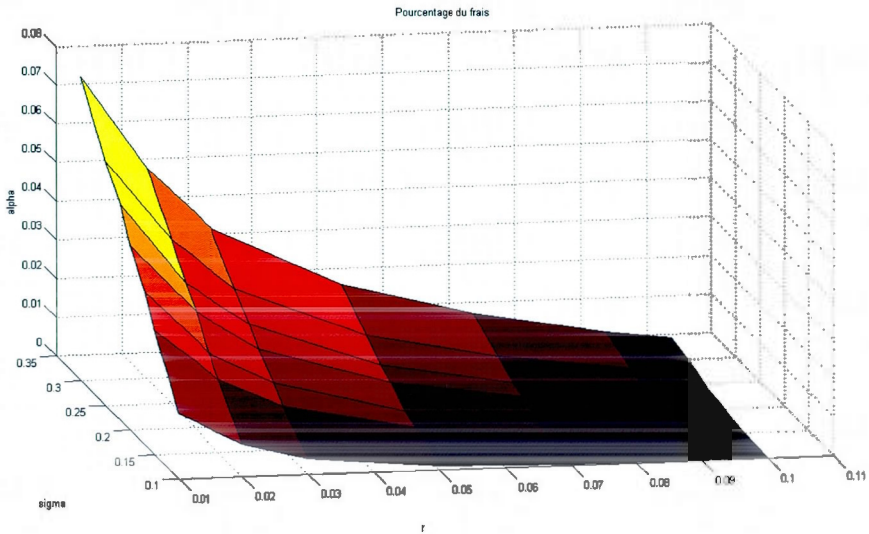


FIGURE 5.1 : α par rapport au taux d'intérêt sans risque et à la volatilité.

5.1 Taux d'intérêt stochastique

Commençons par décrire la dynamique du sous-jacent en intérêt stochastique sous la mesure neutre au risque

$$\begin{aligned} dS_t &= r_t S_t dt + \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_S S_t dB_{1,t} + \rho \sigma_S S_t dB_{2,t}, \\ dr_t &= k_r (\theta_r - r_t) dt + \sigma_r dB_{2,t}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

où

- k_r est la vitesse de retour à la moyenne ;
- θ_r est le taux d'intérêt à long terme ;
- σ_r est la volatilité du taux d'intérêt ;
- ρ est la corrélation entre le taux d'intérêt et l'actif sous-jacent ;
- $B_{1,t}$ et $B_{2,t}$ sont de mouvements Browniens indépendants.

S_t est un processus avec taux d'intérêt stochastique, par contre sa volatilité est constante, ce qui n'est pas idéal, mais c'est une avance dans la complexification du problème. Comme on cherche à modéliser des retraits dans différents points du temps, il est très important que le prix d'une obligation soit facile à décrire, ce qui a été décisif dans le choix du modèle de Vasicek comme modèle de taux d'intérêt. Le prix d'une obligation zéro-coupon $P(t, T) = \mathbb{E}[e^{-\int_t^T r_u du}]$, dont le taux suit un modèle de Vasicek est donné par :

$$P(t, T) = e^{a(t, T) - b(t, T)r_t},$$

où

$$b(t, T) = \frac{1}{k_r} \left(1 - e^{-k_r(T-t)} \right) \text{ et } a(t, T) = \left(\left(\theta_r - \frac{\sigma_r^2}{2k_r^2} \right) (b(t, T) - (T - t)) - \frac{\sigma_r^2}{4k_r} b(t, T)^2 \right).$$

Lemme 3.¹ La dynamique d'une obligation zéro-coupon est donnée par :

$$dP(t, T) = r_t P(t, T) dt - \sigma_r b(t, T) P(t, T) dB_{2,t}$$

1. La preuve se trouve en annexe.

On peut réécrire la dynamique conjointe (5.1) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= r_t dt + \bar{\sigma}_S dB_t, \\ \frac{dP(t, T)}{P(t, T)} &= r_t dt + \bar{\sigma}_D dB_t,\end{aligned}$$

où

$$B_t = \begin{pmatrix} B_{1,t} \\ B_{2,t} \end{pmatrix}, \bar{\sigma}_S = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2}\sigma_S & \rho\sigma_S \end{pmatrix} \text{ et } \bar{\sigma}_D = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_r b(t, T) \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ la filtration engendrée par les mouvements browniens $B_{1,t}$ et $B_{2,t}$, donc l'obligation et l'actif sous-jacent sont des processus adaptés à cette filtration. Une fois la dynamique du sous-jacent et de l'obligation est décrite, nous sommes prêts à entamer la description de la dynamique de l'épargne :

$$dW_t = \begin{cases} ((r_t - \alpha)W_t - G)dt + W_t \bar{\sigma}_S dB_t, & 0 \leq t < \tau_0 \\ 0, & t \geq \tau_0. \end{cases}$$

Avec $W_t = 0$ pour $t \geq \tau_0$, où $\tau_0 = \inf\{t : W_t = 0\}$ et $W_0 = \omega_0$. Trouver la solution de W_t sera plus facile si on laisse de côté pour l'instant la barrière absorbante, c'est-à-dire si on définit la dynamique de \widetilde{W}_t :

$$d\widetilde{W}_t = ((r_t - \alpha)\widetilde{W}_t - G)dt + \widetilde{W}_t \bar{\sigma}_S dB_t. \quad (5.2)$$

Comme on cherche la dynamique de W_t , la relation suivante sera d'une grande utilité :

$$W_t = \widetilde{W}_t \mathbf{1}_{\{\tau_0 > t\}} \text{ ou } W_t = \max(\widetilde{W}_t, 0).$$

Pour trouver la solution de (5.2), il faut faire appel à la généralisation de l'exercice (6.1) du livre de Shreve (2004).

Lemme 4. *Soit*

$$dX_t = [A(t)X_t + a(t)]dt + \sum_{j=1}^r [S_j(t)X_t + \sigma_j(t)]dW_t^{(j)},$$

où $W = \{W_t = (W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(r)}), \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ est un mouvement brownien à r -dimensions et A, a, S_j et σ_j sont mesurables et $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptés et presque-surement localement bornés. Soient

$$\zeta_t = \sum_{j=1}^r \int_0^t S_j(u) dW_u^{(j)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \int_0^t S_j^2(u) du,$$

$$Z_t = \exp \left[\int_0^t A(u) du + \zeta_t \right]$$

L'unique solution de l'équation est donnée par :

$$X_t = Z_t \left[X_0 + \int_0^t \frac{1}{Z_u} \left(a(u) - \sum_{j=1}^r S_j(u) \sigma_j(u) \right) du + \sum_{j=1}^r \int_0^t \frac{\sigma_j(u)}{Z_u} dW_u^j \right]$$

Nous utiliserons le lemme précédent pour trouver la solution de \widetilde{W}_t . Comme le processus r_t est adapté à la filtration engendrée par $B_{1,t}$ et $B_{2,t}$, on obtient

$$\widetilde{W}_t = X_t \left(\omega_0 - \int_0^t \frac{G}{X_u} du \right) \text{ avec} \quad (5.3)$$

$$X_t = \exp \left(\int_0^t \left(r_u - \alpha - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_S \bar{\sigma}_S^T \right) du + \int_0^t \sigma_S dB_u \right).$$

Nous sommes intéressés à la dynamique de W_t plutôt qu'à la dynamique de \widetilde{W}_t , mais grâce à la relation qui existe entre elles, on peut déjà décrire une dynamique pour W_t et en plus, trouver la valeur de la garantie.

Soit $V(W, r, t)$ la somme de la valeur actuelle espérée de flux futurs du détenteur de la garantie et de la valeur du fonds à l'échéance. Alors par définition, on obtient

$$\begin{aligned} V(W, r, t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T r_u du} \widetilde{W}_{T \wedge \tau_0} + \int_t^T e^{-\int_t^u r_s ds} G du \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T r_u du} \max(\widetilde{W}_T, 0) + \int_t^T e^{-\int_t^u r_s ds} G du \middle| \mathcal{F}_t \right). \end{aligned}$$

donc, pour la formule (5.2) on obtient

$$V(W, r, 0) = \int_0^T G \cdot P(0, u) du + \omega_0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_0^T r_u du} X_T \max \left(1 - \int_0^T \frac{G}{\omega_0 X_u} du, 0 \right) \right).$$

Si nous dénotons

$$A_T = \int_0^T \frac{G}{\omega_0 X_u} du,$$

nous obtenons

$$V(W, r, 0) = \int_0^T G \cdot P(0, u) du + \omega_0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_0^T r_u du} X_T \max (1 - A_T, 0) \right). \quad (5.4)$$

Un changement de numéraire par rapport à la mesure de l'action est très utile pour rendre les calculs plus faciles. Soit

$$\left. \frac{d\mathbb{Q}_S}{d\mathbb{Q}} \right|_{\mathcal{F}} = \frac{S_T/S_0}{M_T/M_0},$$

donc, le deuxième terme de l'équation 5.3 peut être décrit ainsi

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_0^T r_u du} X_T \max (1 - A_T, 0) \right) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_S} \left(\frac{M_0}{M_T} \left(\frac{M_T}{M_0} \right) \frac{S_T}{S_0} X_T \max (1 - A_T, 0) \right) \\ &= e^{-\alpha T} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_S} (\max(1 - A_T, 0)), \end{aligned}$$

avec $M_T = e^{\int_0^T r_u du}$. Par le théorème de Girsanov $dB_t^{\mathbb{Q}_S} = dB_t - \sigma_S$, donc, on peut décomposer la valeur espérée au temps T comme :

$$V(W, r, 0) = \underbrace{\int_0^T G \cdot P(0, u) du}_{\text{rente}} + \underbrace{\omega_0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_S} (\max(1 - A_T, 0))}_{\text{option}}.$$

La valeur du contrat peut se lire comme la somme d'une rente certaine et d'une option asiatique arithmétique de maturité T écrite sur l'inverse du sous-jacent S_t .

Le problème de tarification de la garantie GMWB revient encore une fois à calculer la valeur d'une option asiatique, ce qui peut être résolu par simulation ou par différences

Échéance	Vasicek	B.I.	B.S.	MC $r = 0,05$	%
20	0,00362640	0,00351100	0,00376297	0,00281376	29%
15	0,00543397	0,00530655	0,00556839	0,0048	12%
10	0,00964896	0,00941432	0,00987794	0,00959108	1%

TABLE 5.2 : Comparaison de la valeur de la prime α .

Paramètres : $r_0=0,05$; $\rho=-0,2$; $\sigma_r=0,01$; $k=0,0349$; $\theta=0,05$ et $\sigma_S=0,2$.

le symbole % représent la différence relative entre MC et Vasicek

finies. Résoudre ce problème par différences finies n'est pas si simple, car c'est un problème à deux niveaux, ce qui est lourd d'un point de vue computationnel. Pour le résoudre, on devrait appliquer des techniques plus efficaces, telles que ADI comme l'ont fait Jaimungal et al. (2012) pour les cas où le taux d'intérêt et la volatilité sont des processus d'Itô unidimensionnels. Nous allons utiliser le schéma d'Euler-Maruyama avec des variables antithétiques pour trouver une estimation de la valeur de la garantie. Donc, on discrétise Y_t et le taux d'intérêt de la façon suivante :

$$Y_t = Y_{t-1} + (\alpha - r_{t-1})Y_{t-1}dt - \sigma Y_{t-1} \left(\sqrt{1 - \rho_r^2} z_2 + \rho_r z_1 \right) \sqrt{dt},$$

$$r_t = r_{t-1}e^{-\kappa dt} + \theta(1 - e^{-\kappa dt}) + \sqrt{\frac{\sigma_r^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa dt})} z_1,$$

Dans le tableau (5.2), nous comparons les résultats obtenus par la méthode de Monte Carlo avec un taux de rendement fixe $r = 0,05$ sans utiliser de techniques de contrôle de variable et le schéma 1, par rapport à ceux obtenus dans le modèle de taux d'intérêt stochastique sous le modèle de Vasicek, en utilisant les paramètres proposés dans l'article de Peng et al. (2009) et le schéma d'Euler-Maruyama. Dans la figure (5.2), on constate que les valeurs qui augmentent le plus sont celles qui ont une échéance plus éloignée.

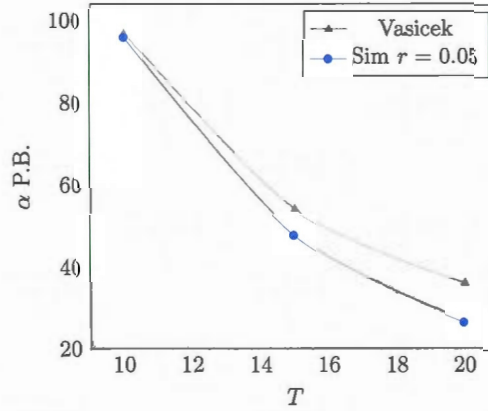


FIGURE 5.2 : Valeur de la prime α avec/sans taux d'intérêt stochastique.

Paramètres : $r_0=0,05$; $\rho=-0,2$; $\sigma_r=0,01$; $k=0,0349$; $\theta=0,05$ et $\sigma_S=0,2$.

5.2 Volatilité stochastique

Plusieurs études ont démontré que les rendements des actifs à risque ne suivent pas nécessairement une loi normale (voir par exemple le chapitre 19 du livre de Hull (2012)) et par conséquent les queues de la distribution empiriques peuvent être plus épaisses que celles d'une loi normale. On veut donc trouver un modèle pour la volatilité qui reflète ce fait et qui satisfait les faits stylisés suivants :

- Volatilité *clustering* : épisodes de haute/basse volatilité.
- L'effet *leverage* : volatilité plus grande quand le prix est à la baisse.

Le modèle de Heston introduit en 1993, reproduit bien ces faits stylisés. Ce modèle est une extension du modèle de Black et Scholes, où la volatilité instantanée suit un processus avec retour à la moyenne et élasticité constante de 0,5, dont la dynamique est celle d'un processus de Cox-Ingersoll-Ross. C'est-à-dire :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t (\sqrt{1 - \rho_v^2} dB_{2,t}^P + \rho_v dB_{1,t}^P),$$

$$dV_t = k_v(\theta_v - V_t)dt + \sqrt{V_t} \sigma_v dB_{1,t}^P.$$

Dans ce modèle, S_t est un processus avec taux d'intérêt prédéterminé.

- k_v est la vitesse de retour à la moyenne de la volatilité (important pour refléter le fait stylisé de la dépendance à court terme de la volatilité. Grands(petits) changements de prix suivent grands(petits) changements de prix).
- θ_v est la variance à long terme.
- σ_v est la volatilité de la volatilité.
- Et, ρ_v la corrélation entre la volatilité et l'action (généralement ρ_v est négatif, car le prix et la volatilité sont inversement proportionnels, ρ détermine le poids des queues et l'asymétrie de la distribution.)
- $B_{1,t}^{\mathbb{P}}$ et $B_{2,t}^{\mathbb{P}}$ sont de mouvements Browniens indépendants.

5.2.1 Mesure neutre au risque

On va introduire le modèle de Heston, tel que le font Kling et al. (2011). Dans le modèle de Heston, il y a deux sources d'incertitude $B_{1,t}$ et $B_{2,t}$ et il y a deux prix de marché du risque γ_1 et γ_2 , tels que si la mesure martingale \mathbb{Q} existe, elle peut être considérée à partir de

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} &= L(t) \\ &= \exp \left(- \left(\int_0^T \gamma_1(u) dB_{1,u} + \int_0^T \gamma_2(u) dB_{2,u} \right) - \frac{1}{2} \left(\int_0^T \gamma_1^2(u) du + \int_0^T \gamma_2^2(u) du \right) \right). \end{aligned}$$

Une condition nécessaire pour que la valeur actuelle de l'actif sous-jacent soit une martingale locale est donnée par

$$\mu - r = \sqrt{V_t}(\rho_v \gamma_1(t) + \sqrt{1 - \rho_v^2} \gamma_2(t)). \quad (5.5)$$

Heston propose comme prix de marché du risque de la volatilité $\gamma_1 = \lambda \sqrt{V_t}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, d'où

$$\begin{aligned} dV_t &= k\theta dt - (k + \lambda\sigma_v)V_t dt + \sigma_v \sqrt{V_t} dB_{1,u}^{\mathbb{Q}} \\ &= k^*(\theta^* - V_t)dt + \sigma_v \sqrt{V_t} dB_{1,u}^{\mathbb{Q}}, \end{aligned}$$

où

$$k^* = k + \lambda\sigma_v \text{ et } \theta^* = \frac{k\theta}{k + \lambda\sigma_v}.$$

Pour obtenir le deuxième prix de marché du risque, on remplace dans l'équation (5.5) et on utilise la condition $2k\theta \geq \sigma_v^2$, d'où

$$\gamma_2(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_v^2}} \left(\frac{\mu - r}{\sqrt{V_t}} - \lambda\rho_v\sqrt{V_t} \right).$$

De cette façon, une fois λ déterminé, les deux prix de marché du risque sont obtenus. Comme λ peut prendre une infinité de valeurs, donc il y a une infinité de mesures martingales. Cela est une conséquence lorsque le marché est incomplet, puisque la volatilité n'est pas transigée, donc la mesure neutre au risque sera unique seulement une fois la valeur de λ fixée. Dans notre cas, on va choisir $\lambda = 0$.

Le modèle de Heston a plusieurs avantages, tel qu'il y a une formule semi-fermée pour le prix d'une option vanille, ce qui rend plus facile la calibration du modèle. Cependant pour le GMWB, il n'existe pas de formule fermée, donc on simulera le prix de la garantie par Monte Carlo, en utilisant le schéma d'Euler-Maruyama, tel qu'on l'a fait dans le cas de taux d'intérêt stochastique, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} S_t &= S_{t-1} + rS_{t-1}dt + \sqrt{V_{t-1}}S_{t-1} \left(\sqrt{1 - \rho_v^2}z_2 + \rho_vz_1 \right) \sqrt{dt}, \\ V_t &= V_{t-1} + k(\theta - V_{t-1})dt + \sqrt{V_{t-1}}\sigma_vz_{1,t}\sqrt{dt}. \end{aligned}$$

Dans le tableau (5.5), nous comparons les valeurs du pourcentage de la prime α en supposant une volatilité constante $\sigma = 0,22$ sans la méthode de variable de contrôle et une volatilité qui suit la dynamique de Heston. On fait cet exercice avec les paramètres de Kling et al. (2011), où nous obtenons une grosse augmentation (2.5 fois la prime) par rapport à la prime sous la supposition d'une volatilité constante.

Échéance	Heston	B.I.	B.S.	$\sigma = 0.22$
20	0,00950916	0,00891095	0,01009044	0,003695
15	0,01505186	0,01414373	0,01590783	0,006237
10	0,02690445	0,02550279	0,02818782	0,01196

(a) Paramètres Kling : $r=0,05$; $\rho=-0,569$; $\sigma_v=0,55$; $k_v=4,75$; $\theta_v=0,22^2$ et $V_0=0,22^2$.

TABLE 5.4 : Comparaison des valeurs de α obtenues sous le modèle de Heston et une volatilité constante.

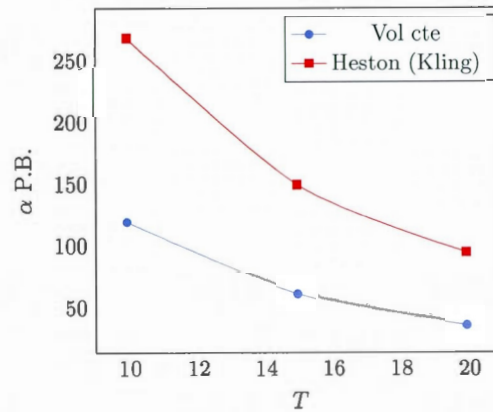


FIGURE 5.3 : Valeur du pourcentage de la prime α avec taux de volatilité stochastique. Paramètres Kling : $r=0,05$; $\rho=-0,569$; $\sigma_v=0,55$; $k=4,75$; $\theta=0,22^2$; $V_0=0,22^2$ et $\sigma_S=0,2$.

5.3 GMWB dynamique

Cette section est basée sur l'article de Dai et al. (2008) et elle a pour but de donner une introduction au GMWB dynamique.

Nous avons mentionné que lorsque le marché est en hausse, il serait peut être préférable de ne pas faire de retraits. Supposons le cas contraire où l'assuré veut retirer un pourcentage supérieur à celui défini dans le contrat, ou même faire un rachat total, dans ce cas, il faudrait ajouter une pénalisation dans le contrat, afin d'éviter que cela devienne une pratique courante. Cette pénalisation peut être définie avec une fonction par morceaux comme le font Chen et al. (2008), dont les pourcentages de pénalisations sont plus grands dans les premières années et commencent à diminuer au fur et à mesure que le temps avance, mais on travaillera, tel que le font Dai et al. (2008) avec un pourcentage de pénalisation k constante pendant la durée du contrat.

On fera la modélisation dans le cas de retraits continus. Cela va nous amener à un problème de contrôle singulier (on parle d'un problème de contrôle singulier lorsque la variable de contrôle tend vers l'infini), dont la variable de contrôle est le taux de retrait. Soit S_t l'actif sous-jacent dans le contrat et supposons que S_t suit un mouvement brownien géométrique dans la mesure neutre au risque, c'est-à-dire

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

Soit D_t la valeur qui reste dans le fonds au temps t , montant à garantir au temps t

$$D_t = D_0 - \int_0^t \gamma_s ds, \quad 0 \leq \gamma_s \leq \lambda,$$

avec $D_0 = \omega_0$ et $D_T = 0$, donc

$$dD_t = -\gamma_t dt,$$

La variable D_t a un rôle prépondérant pour que le problème de contrôle soit singulier, car si elle est discontinue, il y a eu un retrait instantané dans un moment prédéterminé, c'est-à-dire le pourcentage de retrait est infini.

Comme on l'avait mentionné dans le chapitre 2, on représente par f la fonction de pénalisation pour retraits d'un montant supérieur à la valeur G stipulée dans le contrat.

$$f(\gamma_t) = \begin{cases} \gamma_t & \text{si, } 0 \leq \gamma_t \leq G \\ \gamma_t - k(\gamma_t - G) & \text{si, } G < \gamma_t, \end{cases}$$

où k est le pourcentage de pénalisation pour avoir excédé la valeur prédéterminée. Donc, pour un retrait d'un montant γ_t , l'assuré recevra un montant inférieur établi par $f(\gamma_t)$. La dynamique du fonds est donnée par

$$\begin{aligned} dW_t &= (r - \alpha)W_t dt + \sigma W_t dB_t + dD_t \\ &= (r - \alpha)W_t dt + \sigma W_t dB_t - \gamma_t dt, \\ &= ((r - \alpha)W_t - \gamma_t)dt + \sigma W_t dB_t, \end{aligned}$$

d'où la fonction valeur V est

$$V(W, D, t) = \max_{\gamma} \mathbb{E} \left[e^{-r(T-t)} \max(W_T, (1-k)D_T) + \int_t^T e^{-r(u-t)} f(\gamma_u) du \right]$$

Pour résoudre cette équation, on peut faire appel à l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), tel que le font Dai et al. (2008), où f est la fonction qui joue le rôle de processus de contrôle et γ la variable de contrôle. Avant tout, il faut utiliser la condition de Lipschitz pour vérifier que V est borné et que V a une solution unique. On va suivre un chemin un peu moins formel pour déduire les équations, en supposant que les retraits sont finis et tout est bien défini pour utiliser le lemme d'Itô, tels que le font Milevsky et Salisbury (2006). La dynamique d'un portefeuille autofinancé V_t selon Milevsky et Salisbury (2006) peut être décrite par

$$dV_t = rV_t dt + dM_t, \tag{5.6}$$

où M_t est une martingale car $e^{-rt}V_t$ est une martingale, si on inclut le retrait dans la dynamique du portefeuille, celui-ci n'est plus autofinancé, mais sa dynamique est

$$dV_t = rV_t dt + dM_t - f(\gamma_t)dt,$$

Dans ce cas M_t est un surmartingale ($\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \leq M_s$), et une martingale sous un choix optimal de γ_t (Voir Milevsky et Salisbury (2006)). Pour un choix de γ optimal, nous savons que V est une martingale, donc sa dérive est nulle. D'un autre côté, la dynamique de V peut être décrite en utilisant le lemme d'Itô de la façon suivante

$$dV(W, D, t) = -\frac{\partial V}{\partial D}\gamma_t dt + (r - \alpha)W_t \frac{\partial V}{\partial W} dt + \sigma W_t \frac{\partial V}{\partial W} dB_t - \frac{\partial V}{\partial W}\gamma_t dt + \frac{\sigma^2 W_t^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial W^2} dt \quad (5.7)$$

D'où, pour un choix optimal γ des équations (5.5) et (5.6) (ou en utilisant l'équation de HJB), on obtient

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \max_{\gamma_t} \left(f(\gamma_t) - \gamma_t \left(\frac{\partial V}{\partial D} + \frac{\partial V}{\partial W} \right) \right) + (r - \alpha)W \frac{\partial V}{\partial W} + \frac{1}{2}\sigma^2 W^2 \frac{\partial^2 V}{\partial W^2} - rV = 0.$$

Soit

$$C = \frac{\partial V}{\partial D} + \frac{\partial V}{\partial W}$$

et

$$g(C) = (f(\gamma_t) - \gamma_t C),$$

où

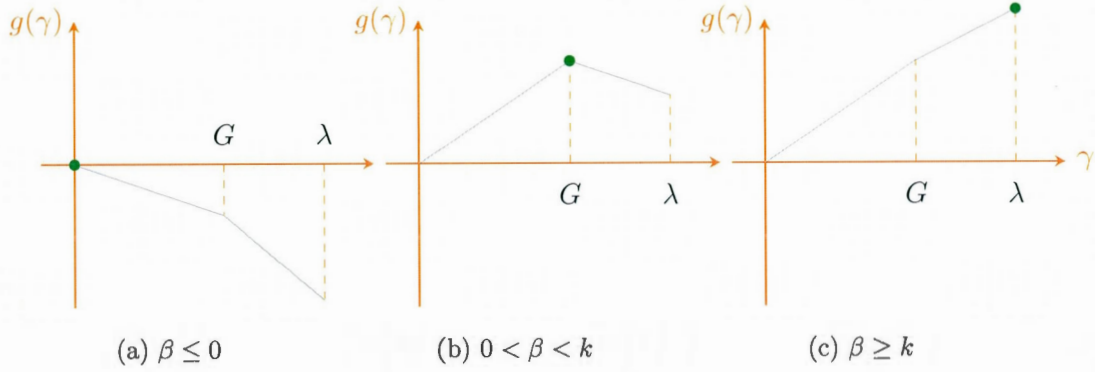
$$\begin{aligned} g(\gamma) &= f(\gamma) - \gamma \frac{\partial V}{\partial W} - \gamma \frac{\partial V}{\partial D} \\ &= \begin{cases} \gamma \left(1 - \frac{\partial V}{\partial W} - \frac{\partial V}{\partial D} \right) & \text{si, } 0 \leq \gamma \leq G \\ kG + \gamma \left(1 - \frac{\partial V}{\partial W} - \frac{\partial V}{\partial D} - k \right) & \text{si, } G \leq \gamma. \end{cases} \end{aligned}$$

Soit $\beta = 1 - \frac{\partial V}{\partial W} - \frac{\partial V}{\partial D}$,

$$g(\gamma) = \begin{cases} \gamma\beta & \text{si, } 0 < \gamma < G \\ kG + \gamma(\beta - k) & \text{si, } G \leq \gamma, \end{cases}$$

La valeur maximale de g est atteinte lorsque $\gamma = 0$, $\gamma = G$ ou $\gamma = \lambda$ (voir figure (5.4)).

Donc, on obtient une expression qui dépend de β pour atteindre la valeur maximale de $g(\gamma)$

FIGURE 5.4 : Valeur maximale de $g(\gamma)$

$$\max_{\gamma} g(\gamma) = \begin{cases} (1 - \frac{\partial V}{\partial W} - \frac{\partial V}{\partial D})G & \text{si, } 0 < 1 - \frac{\partial V}{\partial W} - \frac{\partial V}{\partial D} < k \\ kG + \lambda(1 - \frac{\partial V}{\partial W} - \frac{\partial V}{\partial D} - k) & \text{si, } 1 - \frac{\partial V}{\partial W} - \frac{\partial V}{\partial D} \geq k. \\ 0 & \text{si, } 0 \geq 1 - \frac{\partial V}{\partial W} - \frac{\partial V}{\partial D}. \end{cases}$$

Cette expression peut être réécrite de la façon suivante

$$G \min \left(\max \left(1 - \frac{\partial V}{\partial W} - \frac{\partial V}{\partial D}, 0 \right), k \right) + \lambda \max \left(1 - \frac{\partial V}{\partial W} - \frac{\partial V}{\partial D} - k, 0 \right),$$

donc

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \left(\frac{\partial V}{\partial D} + \frac{\partial V}{\partial W} \right) + (r - \alpha)W \frac{\partial V}{\partial W} + \frac{\sigma^2 W^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial W^2} - rV = 0,$$

est égal à

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + G \min \left(1 - \left(\frac{\partial V}{\partial D} + \frac{\partial V}{\partial W} \right), k \right) + \lambda \max \left(1 - k - \frac{\partial V}{\partial D} - \frac{\partial V}{\partial W} \right) \\ + (r - \alpha)W \frac{\partial V}{\partial W} + \frac{\sigma^2 W^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial W^2} - rV = 0, \end{aligned}$$

où λ est la borne supérieure établie, dans le cas d'un retrait instantané, elle tend vers l'infini. Ce problème peut être résolu par différences finies, où les conditions auxiliaires

T	Dai, $k = 5\%$	Dai, $k = 10\%$	Dif. Fin. (Stat)	Dyn($k=5\%$)/Stat	Dyn($k=10\%$)/Stat
20	125	69	28,7	4,36	2,4
16,67	145	83	40,8	3,55	2,03
14,29	165	97	54	3,06	1,8
10	219	137	97,28	2,25	1,4

TABLE 5.5 : Comparaison de la valeur de frais, α en P.B. paramètres : $r=0,05$ $\sigma_S=0,2$

sont données par Dai et al. (2008) :

$$V(W, D, T) = \max\{W, (1 - k)D\}$$

$$V(W, 0, T) = e^{-\alpha(T-t)}W$$

$$V(0, D, T) = (1 - k) \max(D - G\tau^*, 0) + \frac{G}{r}(1 - e^{-r \min(D/G, \tau^*)})$$

$$V(W, D, t) = e^{-\alpha(T-t)}W \text{ lorsque } W \rightarrow \infty,$$

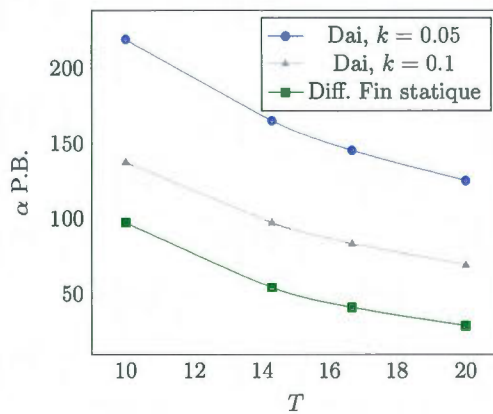
où $\tau^* = \min\left(-\frac{\ln(1-k)}{r}, T - t\right)$.

Ce problème de différences finies n'est pas si simple car c'est encore une fois un problème à deux niveaux, ce qui est lourd d'un point de vue computationnel. Notre objectif était de donner un aperçu de la partie théorique lorsqu'on fait des retraits d'une façon dynamique, mais on va comparer les résultats obtenus par Dai et al. (2008) et ceux que nous avons obtenus dans le cas où les retraits sont constants, c'est-à-dire le cas statique, pour nous donner une idée de l'accroissement de frais α .

Les graphiques suivants nous montrent l'importance du choix de k et l'importance de tenir compte du rachat total, lorsque $k = 0,05$, la valeur peut grimper jusqu'à quatre fois la valeur du cas statique dans une durée longue.

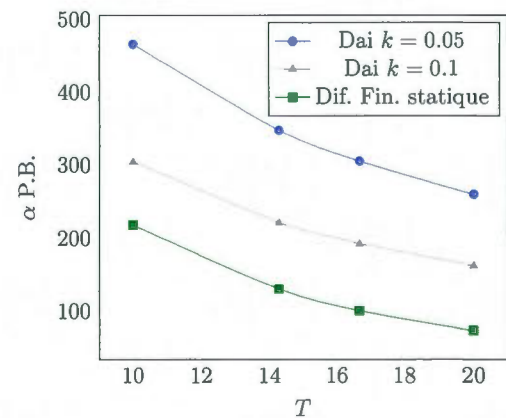
T	Dai, $k = 5\%$	Dai, $k = 10\%$	Dif. Fin. (Stat)	Dyn($k=5\%$)/Stat	Dyn($k=10\%$)/Stat
20	260	162	73	3,56	2,22
16,67	305	192	100	3,05	1,92
14,29	348	221	130	2,68	1,7
10	466	304	218	2,14	1,4

TABLE 5.6 : Comparaison de la valeur de la prime α en P.B. paramètres : $r=0,05$ et $\sigma_S=0,3$.



(a) comparaison α cas dynamique et statique.

Paramètres : $r=0,05$ et $\sigma_S=0,2$.



(b) comparaison α cas dynamique et statique.

Paramètres : $r=0,05$ et $\sigma_S=0,3$.

FIGURE 5.5 : Comparaison du prix de la garantie lorsque le retrait est statique et dynamique.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons d'abord analysé la garantie GMWB lorsque le taux d'intérêt et la volatilité sont constants. Nous avons introduit la modélisation d'une façon graphique et ensuite d'une manière formelle. Ensuite nous avons introduit un taux d'intérêt et une volatilité stochastiques. Nous avons obtenu l'équation (2.7), qui nous permet d'établir la valeur de la prime. L'équation (2.7) a comme terme une espérance. Nous avons étudié cette espérance avec deux approches différentes. La première, celle de Milevsky et Salisbury (2006), qui la réduit à une option de vente asiatique quanto avec moyenne arithmétique. Pour ce type d'options il n'existe pas de formule fermée. Nous présentons donc tous les détails pour arriver à une équation différentielle à une dimension, en suivant l'idée de Vecer afin de la résoudre par la suite avec des méthodes numériques. Ensuite, nous avons présenté l'approche de Liu (2010), qui nous amène à une option d'achat asiatique avec moyenne géométrique. Nous finissons ce chapitre en comparant nos résultats en supposant que la somme de variables lognormales est une variable lognormale avec les résultats obtenus par Liu (2010) et Milevsky et Salisbury (2006). Avec cette simplification, si la volatilité est plus petite que 0.2, nous arrivons à des résultats très proches de ceux de Liu (2010). Cependant, lorsque la volatilité est de 0.3, l'approximation est située entre les deux résultats. Dans le troisième chapitre, nous calculons la valeur de l'espérance de l'équation (2.7) en utilisant la méthode de Monte Carlo combinée à des méthodes de réduction de variance, telles que la variable de contrôle et les variables antithétiques. Nous arrivons à des résultats très proches aux résultats obtenus par Liu (2010) comme dans le cas précédent. Dans le quatrième chapitre, nous travaillons avec la méthode aux différences finies, où encore une fois nous obtenons des résultats très proches à ceux obtenus par Liu (2010). Cette méthode est plus difficile à implémenter que les deux méthodes précédentes, mais elle est très efficace

du point de vue computationnel. En plus, nous concluons qu'il y a un problème dans les résultats numériques de l'article de Milevsky et Salisbury (2006). Dans le cinquième et dernier chapitre, nous étudions l'implémentation de taux d'intérêt et de volatilité stochastiques. Nous sommes arrivés à une expression qui ressemble beaucoup à celle obtenue lorsque le taux d'intérêt et la volatilité sont constants. Nous avons constaté que si la durée de la garantie est inférieure à 10 ans, l'impact du taux d'intérêt stochastique n'est pas si grand. Par contre, pour un contrat d'une durée de 20 ans, la prime est 2.5 fois plus grande que dans le cas où l'intérêt est constant. Pour la volatilité, l'impact à court terme est plus significatif que pour le taux d'intérêt. Ici, nous avons utilisé la méthode de Monte Carlo pour sa simplicité. Bien que la méthode aux différences finies soit très efficace en convergence, son implémentation en plusieurs dimensions n'est pas simple. Pour terminer nous avons fait une introduction aux GMWB dynamique lorsque les retraits sont optimaux.

ANNEXE A

OPTIONS ASIATIQUES

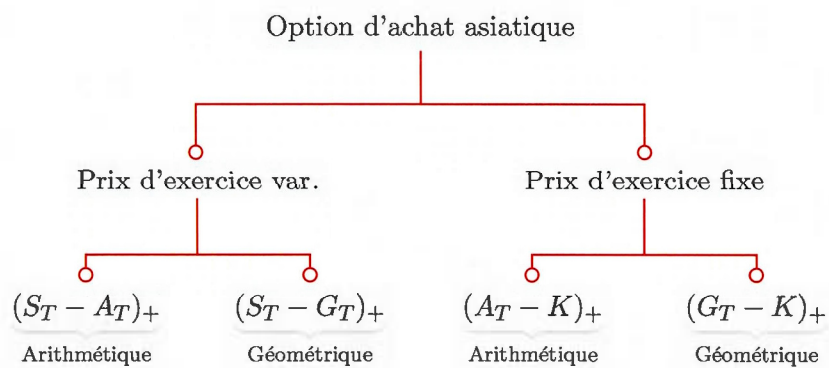
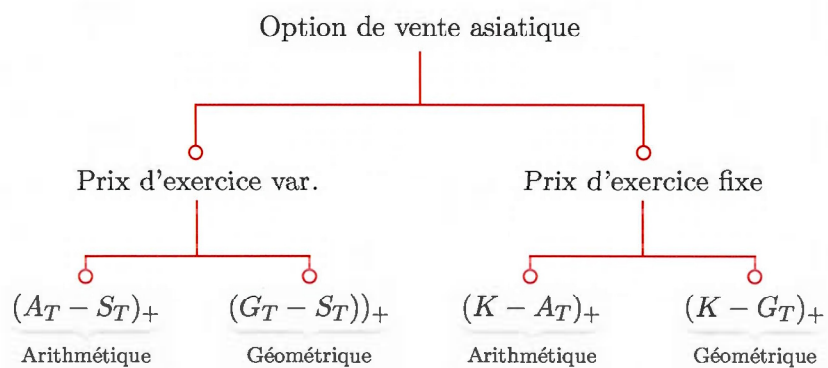
En annexe, nous présentons certains résultats complémentaires qui alourdiraient la présentation du texte principal.

Une option asiatique est une option dont le *payoff* dépend du prix moyen du sous-jacent dans une période prédéterminée. Ce type d'option a une valeur moindre qu'une option vanille car la volatilité du prix moyen est moindre. Soit $\{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}\}$ les bornes inférieures d'une partition équidistante de l'intervalle $[0, T]$. La moyenne géométrique et la moyenne arithmétique de S pour le cas discret sont

$$G_T = \left(\prod_{i=0}^{n-1} S_{t_i} \right)^{1/n}, \quad A_T = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i},$$

Les figures A.1 et A.2 décrivent les différents types d'options asiatiques.

Pour le cas continu $A_t = \frac{1}{D} \int_{t_0}^t D_u du$ pour tout $t \geq 0$.

FIGURE A.1 : *Payoff* d'une option d'achat asiatiqueFIGURE A.2 : *Payoff* d'une option de vente asiatique

ANNEXE B

PREUVE DU LEMME 6

En utilisant le lemme d'Itô, on obtient :

$$\begin{aligned}
 dP(t, T) &= \frac{\partial P(t, T)}{\partial t} dt + \frac{\partial P(t, T)}{\partial r_t} dr_t + \frac{\sigma_r^2}{2} \frac{\partial^2 P(t, T)}{\partial r_t^2} dt \\
 &= P(t, T) \frac{\partial}{\partial t} (a(t, T) - b(t, T)r_t) dt - P(t, T)b(t, T) dr_t + \frac{\sigma_r^2}{2} P(t, T)b^2(t, T) dt \\
 &= P(t, T) \frac{\partial}{\partial t} (a(t, T) - b(t, T)r_t) dt - P(t, T)b(t, T)(k(\theta - r_t) dt + \sigma_r dB_{2,t}) \\
 &\quad + \frac{\sigma_r^2}{2} P(t, T)b^2(t, T) dt \\
 &= P(t, T) \left(\frac{\partial}{\partial t} (a(t, T) - b(t, T)r_t) - b(t, T)k(\theta - r_t) + \frac{\sigma_r^2}{2} b^2(t, T) \right) dt \\
 &\quad - P(t, T)b(t, T)\sigma_r dB_{2,t} \\
 &= P(t, T) \left(\left(\theta - \frac{\sigma_r^2}{2k^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} b(t, T) + 1 \right) - \frac{\sigma_r^2}{2k} b(t, T) \frac{\partial}{\partial t} b(t, T) - \frac{\partial}{\partial t} (b(t, T)r_t) \right) dt \\
 &\quad P(t, T) \left(-b(t, T)k(\theta - r_t) + \frac{\sigma_r^2}{2} b^2(t, T) \right) dt - P(t, T)b(t, T)\sigma_r dB_{2,t} \\
 &= P(t, T) \left(\left(\theta - \frac{\sigma_r^2}{2k^2} \right) \left(-e^{-k(T-t)} + 1 \right) + \frac{\sigma_r^2}{2k} b(t, T)e^{-k(T-t)} + e^{-k(T-t)} r_t \right) dt \\
 &\quad P(t, T) \left(-b(t, T)k(\theta - r_t) + \frac{\sigma_r^2}{2} b^2(t, T) \right) dt - P(t, T)b(t, T)\sigma_r dB_{2,t} \\
 &= P(t, T) \left(\left(\theta - \frac{\sigma_r^2}{2k^2} \right) \left(-e^{-k(T-t)} + 1 \right) - \frac{\sigma_r^2}{2k} b(t, T)(1 - e^{-k(T-t)} - 1) + e^{-k(T-t)} r_t \right) dt \\
 &\quad P(t, T) \left(-b(t, T)k(\theta - r_t) + \frac{\sigma_r^2}{2} b^2(t, T) \right) dt - P(t, T)b(t, T)\sigma_r dB_{2,t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dP(t, T) &= P(t, T) \left(\left(\theta - \frac{\sigma_r^2}{2k^2} \right) \left(1 - e^{-k(T-t)} \right) - \frac{\sigma_r^2}{2} b^2(t, T) + \frac{\sigma_r^2}{2k} b(t, T) + e^{-k(T-t)} r_t \right) dt \\
&\quad P(t, T) \left(-b(t, T)k(\theta - r_t) + \frac{\sigma_r^2}{2} b^2(t, T) \right) dt - P(t, T)b(t, T)\sigma_r dB_{2,t} \\
&= P(t, T) \left(\left(\theta - \frac{\sigma_r^2}{2k^2} \right) \left(1 - e^{-k(T-t)} \right) + \frac{\sigma_r^2}{2k} b(t, T) + e^{-k(T-t)} r_t \right) dt \\
&\quad P(t, T) (-b(t, T)k(\theta - r_t)) dt - P(t, T)b(t, T)\sigma_r dB_{2,t} \\
&= P(t, T) \left(\theta - \frac{\sigma_r^2}{2k^2} - \theta e^{-k(T-t)} + \frac{\sigma_r^2}{2k^2} e^{-k(T-t)} + \frac{\sigma_r^2}{2k^2} (1 - e^{-k(T-t)}) + e^{-k(T-t)} r_t \right) dt \\
&\quad P(t, T) (-b(t, T)k(\theta - r_t)) dt - P(t, T)b(t, T)\sigma_r dB_{2,t} \\
&= P(t, T) \left(\theta - \theta e^{-k(T-t)} + e^{-k(T-t)} r_t - (1 - e^{-k(T-t)})(\theta - r_t) \right) dt - P(t, T)b(t, T)\sigma_r dB_{2,t} \\
&= r_t P(t, T) dt - \sigma_r b(t, T) P(t, T) dB_{2,t}
\end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

- Bacinello, A., Biffis, E., and Millosovich, P. (2009). Pricing life insurance contracts with early exercise features. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233 :27–35.
- Boyle, P., Draviam, T., and Liu, Y. (2005). Variable Annuity Guarantees the GMWB. *IFID Centre's 4th Annual Conference*.
- Chen, Z. and Forsyth, P. A. (2008). A Numerical Scheme for the Impulse Control Formulation for Pricing Variable Annuities with a Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit (GMWB). *Numerische Mathematik*, 109(4) :535–569.
- Chen, Z., Vetzal, K., and Forsyth, P. A. (2008). The effect of modelling parameters on the value of GMWB guarantees. *Insurance : Mathematics and Economics*, 43 :165–173.
- Dai, M., Kuen Kwok, Y., and Zong, J. (2008). Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit in Variable Annuities. *Mathematical Finance*, 18 (4) :595–611.
- Deelstra, G. and Rayée, G. (2012). Pricing Variable Annuity Guarantees in a Local Volatility framework. *Document de travail*.
- Holz, D., Kling, A., and Rub, J. (2007). *GMWB For Life an Analysis of Lifelong Withdrawal Guarantees*. Springer-Verlag.
- Hull, J. (2012). *Options, Futures and others Derivatives, eight edition*. Pearson.
- Jaimungal, S., Donnelly, R., and Rubisov, D. (2012). Valuing GWBs with stochastic interest rates and volatility. *Document de travail*.
- Jimenez, M. (2009). Variable annuities : the GMXB guarantees and the GMWB's optimal surrender behaviour,. *Mémoire, Université de Lyon*.

- Kling, A., Ruez, F., and Rub, J. (2011). The Impact of Stochastic Volatility on Pricing, Hedging, and Hedge Efficiency of Variable Annuity Guarantees. *ASTIN Bulletin*, 41(2) :511–545.
- Lapeyre, B. and Temam, E. (2000). Competitive Monte Carlo methods for the pricing of asian options. *Journal of Computational Finance*.
- Liu, Y. (2010). Pricing and Hedging the Guaranteed Minimum Withdrawal Benefits in Variable Annuities. *Thèse, Université de Waterloo*.
- Milevsky, M. and Posner, S. (1998). Asian options, the sum of lognormals, and the reciprocal gamma distribution. *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, 33(3) :409–422.
- Milevsky, M. and Salisbury, T. (2006). Financial valuation of guaranteed minimum withdrawal benefits. *Insurance :Mathematics and Economics*, 38.
- Peng, J., Leung, K., and Kuen Kwok, Y. (2009). Pricing guaranteed minimum withdrawal benefits under stochastic interest rates. *Quantitative Finance*, 12(6) :933–941.
- Rogers, L. and Shi, Z. (1995). The value of an Asian option, under stochastic interest rates. *Journal of Applied Probability*, 3 :1077–1088.
- Shreve, S. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II, Continuous Time Models*. Springer finance.
- Vecer, J. A new PDF approach for pricing arithmetic average Asian options. *Journal of Computational Finance*, 4 :105–113.